

Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos

Título: Aproximaciones cuasi-analíticas para soluciones subarmónicas en cercanías de una bifurcación de Hopf

Autores: Itovich, G. y Moiola, J.

Lugar: Departamento de Matemática - UNCOMA

Se considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias monoparamétrico, donde ha ocurrido una bifurcación dinámica o de Hopf que lleva a la aparición de una rama de ciclos límites. Mediante la aplicación del teorema de Poincaré-Andronov-Hopf en el dominio frecuencia, es posible obtener una expresión cuasi-analítica aproximada de la solución periódica existente. Es conocido que la evolución temporal del ciclo límite se estudia por medio de la matriz de monodromía correspondiente. Cuando un multiplicador cruza el círculo unidad, por -1 , aparece un fenómeno que se conoce como bifurcación de ciclos de tipo *flip* (o de doble período), muchas veces asociado con sistemas que exhiben caos. Este mecanismo genera un cambio en la estabilidad del ciclo que se encontraba establecido y aparece otro cuyo período es aproximadamente el doble del correspondiente al ciclo de Hopf. Partiendo de la aplicación del teorema mencionado anteriormente, se determinaron expresiones cuasi-analíticas para las soluciones periódicas nuevas que aparecen con una bifurcación *flip*. A menudo, estas soluciones reiteran el fenómeno descrito, en lo que se conoce como cascada de doble período. La metodología desarrollada permitió efectuar una continuación de las soluciones de período dos, detectar una segunda bifurcación de ciclos de tipo *flip* y continuar las soluciones involucradas de período 4.

Título: Autómatas Celulares Permutacionales

Autores: Yazlle Jorge; Jadur Camilo

Lugar: Universidad Nacional de Salta

El presente trabajo tiene por objeto describir la familia de autómatas celulares denominados Autómatas Celulares Permutacionales (ACP) inducidos por códigos prefijos maximales finitos, en el contexto de una full shift unidireccional sobre un alfabeto finito. Dentro de esta clase, se ha encontrado evidencia de un comportamiento dinámico caótico, lo que motiva el interés por su estudio. En particular, se muestra que existen autómatas de la clase cuya convergencia en tiempo finito está garantizada por condiciones suficientes, y otros que no convergen en tiempo finito. Se aborda el problema de determinar si un autómata celular dado pertenece o no a la clase. Además, se trabaja sobre el problema de determinar qué condiciones debe reunir el código inductor para que el ACP inducido sea una transformación sobreyectiva; al respecto, se han logrado varios resultados parciales (condiciones suficientes) y se estudian características dinámicas de las subfamilias de autómatas encontradas. Un caso es el de los ACP inducidos por códigos biprefijos maximales finitos, para los cuales se han logrado mayores resultados, como por ejemplo la determinación de la entropía del autómata en función de las longitudes de las palabras del código, y el hecho de que siempre son sistemas expansivos. En contraste, se muestran otros casos de ACP sobreyectivos sin la propiedad de expansividad, pero con evidencia de sensibilidad a condiciones iniciales. Se muestra también que los sistemas encontrados no son necesariamente conjugados entre sí.

Título: CONDICIONES NECESARIAS PARA UN PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO DE HORIZONTE INFINITO CON RESTRICCIÓN DE TIPO VOLTERRA.

Autores: Sanchez de la Vega, Constanza

Lugar: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.

Se considera el siguiente problema de control óptimo de horizonte infinito:

$$\max_{u(t) \in U} \int_{t_0}^{+\infty} L(t, x(t), u(t)) dt$$

donde el estado evoluciona según la ecuación de Volterra $x(t) = \int_{t_0}^t f(t, x(s), u(s), s) ds + g(t)$, con la condición que exista $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ y $\phi(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)) = 0$ donde $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ y sus derivadas son Holder $\beta > 0$.

Los controles admisibles u se supondrán en un espacio topológico U . Bajo ciertas hipótesis sobre $f(t, s, x, u)$ y $L(t, x, u)$ y sus derivadas respecto de la variable x se obtienen condiciones necesarias y de transversalidad que debe satisfacer un control admisible óptimo:

Teorema 1 *Si u^* es un plan óptimo y x^* la evolución asociada tal que converge la integral $\int_{t_0}^{+\infty} L(t, x^*(t), u^*(t)) dt$ y existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = X^*$. Entonces existen $(\nu, \alpha) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+$ tal que $(\nu, \alpha) \neq (0, 0)$ y $\forall t \in [t_0, +\infty)$ punto de continuidad de u^* vale que $H(t, u^*(t)) = \max_{u \in U} H(t, u)$, donde $H(t, u)$ está definido por*

$$H(t, u) = \alpha L(t, x^*(t), u) + \lambda \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s, t, x^*(t), u) + \int_t^{+\infty} z^*(s) f(s, t, x^*(t), u) ds$$

con $\lambda = -\nu \cdot \phi_x(X^*)$ y $z^*(s) = \alpha w^*(s) + \lambda \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t, s)$ donde w^* es la solución de la ecuación integral $w(t) = \int_t^{+\infty} w(s) f_x(s, t, x^*(t), u^*(t)) ds + L_x(t, x^*(t), u^*(t))$ y $R(t, s)$ es la resolvente de la ecuación lineal de Volterra con núcleo $f_x(t, s, x^*(s), u^*(s))$.

Título: Convergencia de Soluciones en Problemas Penalizados de Control Óptimo Distribuido.

Autores: Claudia Gariboldi - Domingo Tarzia

Lugar: Univ. Nac. de Río Cuarto - Univ. Austral-CONICET

Se considera un dominio acotado Ω de R^n cuya frontera regular Γ consiste de la unión de cuatro porciones disjuntas $\Gamma_{10}, \Gamma_{11}, \Gamma_2, \Gamma_3$. Se considera sobre dicho dominio el problema de tipo elíptico mixto siguiente: $-\Delta u = g$ en Ω , $u = b$ en Γ_{10} , $-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - b)$ en Γ_{11} , $-\frac{\partial u}{\partial n} = q$ en Γ_2 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en Γ_3 . Se plantea una familia de problemas de control óptimo distribuido (P_α) , para cada $\alpha > 0$, para una determinada función costo J motivados por problemas estacionarios de cambio de fase. Se prueba que existe una única solución (u_α, g_α) del problema de control óptimo mencionado. Se utiliza el método de penalización para generar una familia de problemas $(P_{\alpha\epsilon})$ para cada $\epsilon > 0$ con su correspondiente función costo $J_{\alpha\epsilon}$. Se prueba que para todo $\epsilon > 0$, existe una única solución $(u_{\alpha\epsilon}, g_{\alpha\epsilon})$ de $(P_{\alpha\epsilon})$, que $J_{\alpha\epsilon}$ es G-diferenciable y se da la correspondiente condición de optimalidad. Se prueba que para cada $\alpha > 0$ fijo, cuando el parámetro $\epsilon \rightarrow 0$ se tienen las siguientes convergencias fuertes: $g_{\alpha\epsilon} \rightarrow g_\alpha$ en $L^2(\Omega)$, $u_{\alpha\epsilon} \rightarrow u_\alpha$ en $H^2(\Omega) \cap V_0$, $\frac{\partial u_{\alpha\epsilon}}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ en $L^2(\Gamma_2)$ y el estado adjunto $p_{\alpha\epsilon}$ del sistema para el problema $(P_{\alpha\epsilon})$ al estado adjunto p_α del sistema para el problema (P_α) en $H^2(\Omega) \cap V_0$. Se demuestra un teorema de caracterización de la solución óptima de (P_α) . Finalmente se prueba la convergencia débil en $(L^2(\Omega))^2$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$, para cada $\epsilon > 0$ fijo, a la solución óptima (u_α, g_α) de un problema (P) límite de control óptimo distribuido.

Título: Desingularización de Sistemas Diferenciales Algebraicos

Autores: H. Cendra (1); M. Etchechoury (2); A. Ibort (3)

Lugar: (1) Dep. de Matemática, UNSur (2) Dep. de Matemática, UNLP, (3) Dep. de Matemática, U. Carlos III, Madrid.

Sea M una variedad con $\dim M = n$; sea $a : TM \rightarrow R^m$ una aplicación suave tal que, para cada $(x, \dot{x}) \in TM$, $a(x, \dot{x}) \equiv a(x) \cdot \dot{x}$, es decir, lineal en \dot{x} ; y sea $f : M \rightarrow R^m$ una aplicación suave. Consideramos un sistema diferencial algebraico -SDA- del tipo $a(x) \cdot \dot{x} = f(x)$.

Para resolver el sistema se establece el siguiente algoritmo :

(a₁) $M_1 \subseteq M$ es el subconjunto de todos los $x \in M$ tal que el SDA tiene solución.

(a₂) Para $k = 1, 2, \dots$ suponemos que M_k es una subvariedad y $M_{k+1} \subseteq M_k$ es el conjunto de todos los $x \in M$ tal que el SDA tiene una solución $(x, \dot{x}) \in TM_k$.

Si las hipótesis hechas en cada paso se verifican el algoritmo se estabiliza en un cierto paso q , es decir $M_q = M_{q+1}$. Luego, el sistema restringido a M_q tiene una solución $(x, \dot{x}) \in TM_q$. La hipótesis que M_k es variedad suave es demasiado restrictiva en muchos ejemplos importantes. Para evitar esta dificultad presentamos un nuevo algoritmo donde suponemos que contamos con un proceso de desingularización para las variedades bajo consideración, en el caso en que sea necesario. Se ilustra el nuevo algoritmo con algunos ejemplos.

Referencias:

P. Rabier and W. Rheinboldt, Treatment of Implicit Differential-Algebraic Equations, J. of Diff. Eq. 109 (1994) 110-146.

H. Hauser, The Hironaka Theorem on Resolution of Singularities, Bulletin of the AMS 40 (2003) 323-403.

Título: Estabilidad de cierto tipo de ecuaciones de evolución de tipo parabólico

Autores: O. Barraza, C. Ruscitti

Lugar: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

Como es bien conocido, el estudio de la estabilidad de soluciones de una PDE presenta un destacado interés debido a estar estrechamente vinculada a diversas propiedades de las soluciones de la misma, como por ejemplo la unicidad de solución o el cálculo de soluciones aproximadas obtenidas mediante algún algoritmo numérico.

En este trabajo se estudia la estabilidad de las soluciones de cierto tipo de ecuación de evolución de tipo parabólico. Se establecen condiciones suficientes bajo las cuales dichas soluciones resultan (exponencialmente) estables suponiendo la existencia de soluciones fuertes de la ecuación. Además, en el mismo se exponen las estimaciones que presentan las soluciones perturbadas.

Título: Estabilidad Orbital del Sóliton de la Ecuación de Klein-Gordon

Autores: J.P. Borgna, D.F. Rial

Lugar: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ccias. Exactas, UBA

Consideramos la ecuación de Klein-Gordon con no linealidad del tipo potencial y con condiciones de borde periódicas en el intervalo $[0, 1]$

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^{2\sigma} u = 0$$

Se lo puede reescribir como el sistema

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = \varphi_{xx} - \varphi + |\varphi|^{2\sigma} \varphi \end{cases}$$

que presenta estructura hamiltoniana con por lo menos dos cantidades conservadas por el flujo: el hamiltoniano $\mathcal{H}(\varphi, \psi)$ y la carga $\mathcal{Q}(\varphi, \psi) = \text{Im} \left(\int \varphi \bar{\psi} dx \right)$, de modo que tenemos la función de Lyapunov $\mathcal{E} = \mathcal{H}(\varphi, \psi) + E\mathcal{Q}(\varphi, \psi)$. Sabemos que hay soluciones “sóliton” dadas por $(\varphi, \psi) = (Re^{iEt}, iERe^{iEt})$. Se define una noción de órbita del par (R, iER) (a éste se le denomina el par sóliton) y una noción de distancia de un par cualquiera a la órbita. El principal resultado es que esta solución sóliton resulta ser estable (si el dato inicial es una pequeña perturbación del par soliton, la solución permanece cerca para siempre) si el valor del exponente σ es cercano a 0, o si σ es relativamente grande pero la condición inicial del problema se encuentra en la hipersuperficie de isocarga del mismo. También vemos que en este último caso la dirección de inestabilidad es la dirección normal a esta hipersuperficie.

Título: Inestabilidad lineal en flujo de dos capas
Autores: Fernando Menzaque, Cristina Turner
Lugar: Facultad de Matematica, Astronomia y Fisica -
Universidad Nacional de Cordoba

Analizaremos la dinámica de un fluido estratificado en dos capas, en aguas poco profundas.

En este modelo existen dos posibles formas en que el fluido se mezcle, una se debe a las inestabilidades de corte, matemáticamente esto implica que la dinámica de las ecuaciones se ha vuelto elíptica y la otra a que ondas internas del fluido se rompen, esto surge de la modulación de ondas en sistemas hiperbólicos no lineales.

Este es un resultado de inestabilidad no lineal para sistemas 2×2 autónomos de tipo mixto (hiperbólico-elíptico).

Estableceremos criterios para determinar cuando un dominio elíptico se puede alcanzar suavemente comenzando con condiciones iniciales hiperbólicas.

Referencias

- [1] Majda A.-Rosales R.-Tabak E. -Turner C., Interaction of large scale equatorial waves and dispersion of Kelvin waves through topographic resonances, Jour. Atmospheric Sciences, vol 56,4118-4133, 1999.
- [2] Menzaque, F.; Rosales,R.; Tabak,E.; Turner,C. *The forced inviscid Burgers equation as a model for non-linear interactions among dispersive waves*. Contemporary Mathematics, vol 283 (2001), pp. 51-82.

Título: Recurrencia y presión topológica para homeomorfismos con especificación

Autores: Alejandro Mesón y Fernando Vericat

Lugar: Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB)
CONICET-UNLP, La Plata

El teorema de recurrencia de Poincaré asegura que si $f : X \rightarrow X$ es una aplicación que preserva una medida de probabilidad μ sobre X entonces, μ -a.e., todos los puntos de cualquier conjunto medible A retornan con frecuencia infinita a A . El teorema ergódico de Birkhoff da la frecuencia con la cual las órbitas visitan cada conjunto. Un problema relacionado es estimar el promedio con el que el punto retorna a un pequeño entorno de él. En este contexto juega un rol importante la función de tiempo de retorno de Poincaré, de un conjunto definida como $\tau(A) = \min\{j : f^j(A) \cap A \neq \emptyset\}$. En un espacio métrico compacto (X, d) consideramos la siguiente métrica

$d_n(x, y) = \max\left\{d[f^i(x), f^i(y)] \mid i = 0, 1, \dots, n-1\right\}$ y denotamos con

$B_{n, \varepsilon}(x)$ la bola de centro x y radio ε en la métrica d_n . Llamamos $\tau_{n, \varepsilon}(x)$ a la función de retorno de Poincaré de la bola. En esta comunicación obtenemos una relación entre la recurrencia y la presión topológica de ciertos potenciales φ . El resultado es derivado bajo las condiciones que $f : X \rightarrow X$ sea un homeomorfismo expansivo con especificación y φ pertenezca a una clase de funciones que incluye las Hölder continuas en conjuntos hiperbólicos.

Título: Resultados sobre el comportamiento de la solución de un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden. Análisis cualitativo.

Autores: L.T.Villa - N.A.Acosta

Lugar: Facultad Ingeniería Universidad Nacional de Salta - Consejo de Investigación - CONICET

Siguiendo un enfoque en el contexto del denominado conceptualmente como Análisis Cualitativo, se obtienen algunos resultados - de interés práctico en eventuales aplicaciones - satisfechos por la solución del Problema de Valores Iniciales (PVI) en interés, válidos cuando se imponen determinadas restricciones sobre los coeficientes p , q y la función $f=f(t)$. Se destaca que los resultados se alcanzan sencillamente usando conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral de una variable real, con total prescindencia de todo el cúmulo de información clásicamente conocida en el campo de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes, como ser estructura de la solución general a partir del polinomio y ecuación característica asociada a la respectiva ecuación homogénea, solución particular de la no homogénea, etc.

Título: Un modelo cuántico para semiconductores.

Autores: Mariano Fernando De Leo

Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. U.B.A.

Entre los factores más importantes que hay que tener en cuenta para modelar la evolución en el tiempo del movimiento de cargas en un semiconductor se encuentra la interacción de las cargas con la red cristalina. Tal interacción suele modelarse con el llamado *operador de colisión de Fokker-Planck*. Si además se tiene en cuenta el acoplamiento con el potencial electrostático, modelado por la ecuación de Poisson, la ecuación que resulta, en el caso cuántico, se conoce como ecuación de Wigner-Poisson-Fokker-Planck.

En este trabajo se presentan las ecuaciones básicas del modelo; se muestra cómo obtener las cantidades macroscópicas (físicas) relevantes: carga, corriente, energía y, por último, se analiza la evolución de las mismas.

Título: Un problema de Stefan a una fase con una fuente no clásica

Autores: Adriana C. BRIOZZO - Domingo A. TARZIA

Lugar: Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Rosario.

Se considera el siguiente problema de frontera libre (problema de Stefan a una fase) para la temperatura $u(x,t)$ y la frontera libre $x=s(t)$ para una ecuación no clásica del calor [Ta]. Se supone la existencia de una fuente de energía modelizada por una función de control F que depende de la evolución del flujo de calor en el extremo $x=0$ dado por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= -F(u_x(0,t)), & 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T, \\u(0,t) &= f(t) \geq 0, & 0 < t < T, \\u(s(t),t) &= 0, \quad u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t), & 0 < t < T, \\u(x,0) &= h(x), & 0 \leq x \leq b = s(0).\end{aligned}$$

El problema de frontera libre es equivalente a un sistema de ecuaciones integrales en las incógnitas $v(t) = u_x(s(t),t)$ y $V(t) = u_x(0,t)$. Para adecuados datos F , f y h , se demuestra la existencia y unicidad de solución para tiempos pequeños mediante la aplicación de un teorema de punto fijo usando técnicas de [Fr, Ru].

[Fr] A. Friedman, "Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids", J. Math. Mech. 8 (1959), 499-517.

[Ru] I. Rubinstein, "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs # 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).

[Ta] D.A. Tarzia, "A Stefan problem for a non-classical heat equation", MAT – Serie A, 3 (2001), 21-26.

Título: Una ecuación del tipo del péndulo forzado,
para el p-Laplaciano
Autores: Pablo Amster. Pablo De Nápoli
Lugar: Universidad de Buenos Aires

En este trabajo, estudiamos el problema no lineal:

$$\begin{cases} \Delta_p u + g(u) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = c & \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = h(c) \end{cases} \quad (1)$$

donde c es una constante (desconocida), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio con frontera suave, y $-\Delta_p$ es el operador p-Laplaciano ($1 < p < \infty$):

$$-\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

Este problema puede considerarse como una generalización del problema clásico de encontrar soluciones periódicas de la ecuación del péndulo forzado:

$$u'' + g(u) = f(t)$$

donde $g(u) = \sin u$, y problemas análogos que han sido ampliamente estudiados en la literatura, utilizando las diversas técnicas del análisis no lineal, tales como los métodos variacionales y topológicos.

En este trabajo, analizamos en qué medida resulta posible la aplicación de las técnicas utilizadas para la ecuación del péndulo, al problema considerado. La conclusión es que su aplicación no está limitada a problemas de ecuaciones ordinarias, obteniéndose varios resultados de existencia de soluciones para nuestro problema multidimensional, análogos a los previamente conocidos para la ecuación del péndulo forzado.

Más específicamente, probamos un principio de comparación para las soluciones de nuestro problema, lo que nos permite emplear el método de sub y super soluciones.

Por otra parte, empleamos una generalización de la teoría de grado de coincidencia de Mawhin para el caso del p-Laplaciano (para el cual dicha teoría no se aplica, dado su carácter no lineal).