Análisis Real

Título: Acotación de Operadores y Medidas de Carleson
P̈araproducto¨
Autores: Pablo Sebastián Viola
Lugar: IMAL Instituto de Matemática Aplicada del Litoral

El conocido Teorema $T1$ de David y Journé proporciona condiciones necesarias y suficientes para la acotación en L^2 de operadores no necesariamente de convolución. Estas condiciones están relacionadas con el hecho que $T1$ y $T1^*$ pertenezcan al espacio de oscilación media acotada BMO. Para su prueba se usa lo que se conoce como el "paraproducto", reduciendo la demostración del Teorema al caso $T1 = T^*1 = 0$. En la obtención de esta reducción se estudia la acotación del operador $P_t f(x) = \varphi_t * f(x)$, donde $\varphi_t = t^{-n}\varphi(x/t)$ con $\varphi \in C_0^\infty$, $\int \varphi = 1$ y $sop(\varphi) \subset \{x : |x| < 1\}$, obteniéndose la siguiente estimación

$$\int\int_{R_+^{n+1}} |\varphi_t f(x)|^p d\nu(x,t) \leq C||f||_p^p \quad ,$$

donde $d\nu(x,t) = |Q_t\beta(x)|^2 \, \frac{dxdt}{t}$ con $Q_t = -t\frac{dP_t}{dt}$ y $\beta \in \ BMO$.

Con el propósito de generalizar el Teorema T1 al caso en que $T1$ y T^*1 pertenezcan al espacio de oscilación media controlada por una función de crecimiento Φ, denotado BMO_Φ, se investiga la acotación del operador $P_t f$ para el caso

$$d\nu(x,t) = \frac{|Q_t\beta(x)|^2}{\Phi(t)^2} \, \frac{dxdt}{t} \qquad \text{con } \beta \in \ BMO_\Phi.$$

Se obtiene la acotación en L^p de este operador cuando $\Phi(t) = t^\alpha$, para $0 < \alpha < 1$.

Título: Algunos resultados recientes sobre operadores pseudodiferenciales bilineales
Autores: Rodolfo H. Torres
Lugar: Universidad de Kansas, Lawrence, KS 66049, Estados Unidos

Operadores bilineales y multilineales aparecen naturalmente en muchos problemas en análisis y ecuaciones diferenciales. En este charla se presentaran una serie de resultados sobre operadores pseudodiferenciales bilineales obtenidos con diversos colaboradores. En particular, el estudio reciente en espacios de Sobolev de operadores bilineales y estimaciones que generalizan la regla de diferenciación de Leibnitz son trabajo en conjunto con Árpád Bényi y Andrea Nahmod.

Título: Bases de Riesz de mínimo soporte de subespacios de funciones spline deficientes.
Autores: Cammilleri, A. Serrano E.
Lugar: FI - FCEyN (UBA) - ECyT (UNSAM)

Consideramos las clases $S_{m,d}$ de funciones spline de orden m y deficiencia d, $1 \leq d \leq m$, con nodos enteros. En esta comunicación mostramos la existencia de bases de los subespacios $S_{m,d} \cap L^2(R)$, generadas por las traslaciones enteras de funciones d-vectoriales de mínimo soporte. Estas funciones verifican una relación de doble escala y se prueba que las bases generadas satisfacen la condición de Riesz.

Más aún, tales funciones constituyen funciones multiescala de dimensión d. Por tanto se concluye que cada subespacio $S_{m,d} \cap L^2(R)$ genera una estructura de análisis multirresolución. En función de m y d existe una natural relación de inclusión entre las mismas. $\diamond$

Título: Bases Incondicionales de los espacios Orlicz-Sobolev con peso

Autores: Fabiana G. Montenegro
Lugar: FIQ- Imal

El propósito de este trabajo es la caracterización a través de wavelets de una versión pesada de los espacios de Orcliz-Sovolev. Estos espacios, denotados por $L^{\phi,s}_{\omega}$, se definen como el conjunto de funciones medibles tales que ωf y $\omega D^m f$ (en el sentido débil) pertenecen al espacio de Orcliz L^{ϕ}, para todo $m = 0, \ldots, s$. Esta caracterización permite en particular demostrar que adecuadas bases de wavelets son bases incondicionales de estos espacios.

Para la obtención de estos resultados se hallan normas equivalentes en $L^{\phi,s}_{\omega}$, una involucrando un multiplicador y otra en términos de una versión discreta de la función de Littlewood-Paley. Usando las mismas y un teorema de interpolación entre espacios de Orcliz pesados, se obtiene la caracterización en términos de wavelets.

Título: Composición de operadores en espacios de Orlicz
Autores: Bongioanni Bruno
Lugar: FIQ-UNL IMAL-CONICET (Santa Fe)

En [1], Neuguebauer estudia desigualdades modulares para el operador que consiste en componer un número finito de veces de la maximal de Hardy-Littlewood consigo misma. Este operador composición ya no es de tipo débil $(1,1)$ y los resultados de interpolación usuales no pueden ser utilizados. Lo mismo ocurre con operadores de tipo débil restringido como el operador Maximal Cesàro. Encontramos las propiedades de acotación en espacios de Orlicz del operador M_α^-, con $0<\alpha<1$, compuesto j veces. El resultado obtenido puede enunciarse de la siguiente manera:

Sea (Ω,μ) un espacio de medida y $\mathfrak{M}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles. Sean T_1, T_2, ... y T_j, j operadores definidos en $\mathfrak{M}(\Omega)$, todos ellos de tipo débil restringido (p,p), para algún $p>1$ y tipo (∞,∞). Sean $\Phi(t)=\int_0^t a$ y $\Psi(t)=\int_0^t b$, donde a y b son funciones no negativas y b es creciente. Si a y b satisfacen la desigualdad

$$(1)\quad \sup_{t\geq 1}\left(\int_1^t \frac{a(s)}{s^p}\,\log^{p(j-1)}(t/s)\,ds\right)^{1/p}\left(\int_t^\infty b(C_2\,s)^{-p'/p}\,ds\right)^{1/p'}<\infty$$

entonces, existe C tal que el operador $T=T_1\circ T_2\circ\ldots\circ T_j$ satisface la desigualdad modular

$$\int_\Omega \Phi(|Tf|)\,d\mu\leq C+C\int_\Omega \Psi(C\,|f|)\,d\mu,$$

para toda $f\in\mathfrak{M}(\Omega)$.

La condición (1) es óptima por ser necesaria para la j-ésima compoción del operador Maximal Cesàro.

Referencias

[1] C. J. Neugebauer. Orlicz-type integral inequalities for operators. *J. Korean Math. Soc.*, 38(1):163–176, 2001.

Título: Convergencia de discretizaciones de espacios de tipo homogéneo.

Autores: Aimar Hugo, Carena Marilina, Iaffei Bibiana.
Lugar: IMAL - CONICET

En [Wu98] se obtiene una demostración alternativa a la de [VK87] de la existencia de una medida de probabilidad duplicante sobre un espacio métrico compacto (X, ρ) con dimensión métrica (o de Assouad) finita. En la construcción de Wu se obtiene una sucesión creciente $\{S_n\}$ de conjuntos finitos con dispersión exponencialmente decreciente, y se construyen mediante una adecuada ponderación, medidas μ_n con soporte en S_n. Si bien cada una de estas medidas discretas carece de la propiedad de duplicación, su límite débil $*$ μ la tiene. Nuestro propósito es obtener este resultado como consecuencia de uno más general que establece que: si (X, ρ) un espacio métrico compacto, $\{S_n\}$ es una sucesión de subconjuntos compactos de X tal que $S_n \overset{\mathscr{H}}{\to} X$ (es decir, converge en el sentido de Hausdorff), y $\{\mu_n\}$ es una sucesión de medidas sobre X tal que $\{(S_n, \rho, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo, μ_n tiene soporte en S_n para todo n y $\mu_n \overset{w^*}{\to} \mu$, entonces (X, ρ, μ) es también un espacio de tipo homogéneo. Para aplicar este resultado probamos que

Teorema 1. *Si $\{S_n\}$ y $\{\mu_n\}$ son las obtenidas en la construcción de Wu, entonces $\{(S_n, \rho, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo (es decir, existe una cosntante A tal que $A_n \leq A$ para todo n, donde A_n es la constante de duplicación de μ_n sobre S_n), $S_n \overset{\mathscr{H}}{\to} X$ y $\mu_n \overset{w^*}{\to} \mu$.*

Referencias

[VK87] A. L. Vol′berg and S. V. Konyagin, *On measures with the doubling condition*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), no. 3, 666–675. MR 88i:28006

[Wu98] Jang-Mei Wu, *Hausdorff dimension and doubling measures on metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 5, 1453–1459. MR 99h:28016

Título: Espacios Invariantes por Traslaciones en Espacios de Hilbert Abstractos
Autores: Gustavo E. Massaccesi
Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Un *espacio invariante por traslaciones* es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^n)$, que es invariante bajo la acción de las traslaciones $T_1, \ldots, T_n$ de longitud uno paralelas a cada uno de los ejes de $\mathbb{R}^n$. Analizamos los análogos a estos espacios en un espacio de Hilbert abstracto, con una estructura adicional adecuada. Las traslaciones enteras de $L^2(\mathbb{R}^n)$ son reemplazadas por n operadores unitarios arbitrarios que conmutan, llamados *shifts*.

Definimos dos operaciones en el espacio: Una es el producto entre dos vectores, definida para reemplazar al Grammiano. Es análoga al producto interno, pero toma valores en $L^1(\mathbb{T}^n)$. La segunda operación es el producto de un vector por una función medible de $\mathbb{T}^n$ que produce un nuevo vector. Es análoga al producto por un escalar, pero el escalar está reemplazado por una función.

Estas operaciones definen una estructura de Módulo de Hilbert, que permite trasladar algoritmos que usan el Grammiano en $L^2(\mathbb{R}^n)$ a un espacio de Hilbert arbitrario con shifts.

Analizamos los espacios que tienen una base de Riesz inducida por una familia finita de vectores, y usamos el método de Gram-Schmidt, con la nuevas operaciones, para obtener una base ortonormal inducida por otra familia finita.

Aplicamos estos métodos en contextos donde los shifts no son translaciones, por ejemplo en un caso especial de sistemas de Gabor.

Título: Estimaciones débiles con pesos de los conmutadores multilineales asociados a la integral fraccionaria
Autores: Gorosito, O., Pradolini, G. y Salinas, O.
Lugar: IMAL- Fac. de Ing. Química (UNL)

En el contexto de $\mathbb{R}^n$ se considera el conmutador multilineal de la integral fraccionaria definido, para $0 < \alpha < n$, por

$$I_\alpha^{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^{m} (b_k(x) - b_k(y)) \right) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy$$

siempre que la integral del segundo miembro sea finita.

Se prueba que si w es un peso en A_∞ y las funciones b_i pertenecen a los espacios $Osc_{\exp L^{p_i}}$, siendo $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i = 1/r$, la siguiente desigualdad es válida
(0.1)

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|I_\alpha^{\vec{b}} f(x)\right| > t\right\}\right) \leq C\varphi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\frac{|f(x)|}{t} \|\vec{b}\|_{Osc_{\exp L^r}}\right) \psi(Mw)(x)dx\right)$$

donde $B(t) = t(1+\log^+ t)^{1/r}$, $\psi(t) = t^{1-\alpha/n}(1+\log^+(t^{-\alpha/n}))^{1/r}$, $\varphi(t) = \left(t(1+\log^+ t^{\alpha/n})^{1/r}\right)^{n/(n-\alpha)}$. El caso $w = 1$ y $m = 1$ fue probado en [CUF] y el caso $\alpha = 0$ recupera el resultado de [PT]. Asimismo se obtienen resultados de acotación fuerte para estos operadores.

[CUF] Cruz Uribe, D. and Fiorenza, A.: *Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals*, Trinity College Depart. of Math. (2002), No. 1
[PT] Pérez, C. and Trujillo Gonzalez, R.: *Sharp weighted estimates for multilinear commutators*, J. London Math. SOc (2) 65, (2002), 672-692.

Título: Multiresolución en espacios de tipo homogéneo.
Aproxmación de funciones de Lebesgue con pesos.
Autores: Aimar, H., Bernardis, A., Iaffei, B.
Lugar: Imal (CONICET)-Fac. de Ing. Qca.-Fac. de Bqca. y Cs. Biol.
Fac. de Hum. y Cs.(U. N. L.), Santa F

Usando la construcción de familias de conjuntos diádicos de M. Christ [3] en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) es posible introducir una estructura de tipo AMR en $L^2(X, d, \mu)$ y construir los correspondientes operadores de proyección ortogonal. Usando los resultados de [1] se extienden algunos de [2] en el caso diádico en este contexto. En particular se obtienen acotación y convergencia de los proyectores P_j en espacios L^p con pesos.

Referencias

[1] H. Aimar, A Bernardis and B. Iaffei, *Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type,* preprint (2004).

[2] H. Aimar, A Bernardis and F. Martín Reyes, *Multiresolution Approximations and Wavelet Bases of Weighted L^p Spaces,* J. Fourier Anal. Appl. **9**(2003),497-509.

[3] M. Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral,* Colloq.Math. **61**(1990),601-628.

Título: Separación y contacto de conjuntos de dimensiones diferentes en un ambiente doubling
Autores: Hugo Aimar y Liliana Nitti
Lugar: IMAL-CONICET y FIQ- UNL

Se obtienen resultados del siguiente tipo:

Teorema 1 (Separación): Sea (X, d) un espacio casi-métrico tal que $X = X_1 \bigcup X_2$ con $X_1 \bigcap X_2 = \emptyset \quad X_1 \neq \emptyset \quad X_2 \neq \emptyset$ y X_1 cerrado. Sean $0 < d_1 < d_2 < \infty$. Sean μ_i medidas de Borel soportadas en $X_i, \quad i = 1, 2$ tales que existen constantes positivas y finitas A, A_1, A_2, C_1 y C_2 tales que las desigualdades $0 < \mu_1(B(x_1, kr)) \leq AK^{d_1}\mu_1(B(x_1, r)) < \infty, \quad C_1 \leq \mu_1(B(x_1, 1)) \leq C_2$ y $A_1 r^{d_2} \leq \mu_2(B(x_2, r)) \leq A_2 r$, valen para todo $x_1 \in X_1, \quad r > 0, \quad k > 1$ y $x_2 \in X_2$. Entonces si $\mu(E) = \mu_1(E \bigcap X_1) + \mu_2(E \bigcap X_2)$; (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo si y sólo si X_1 y X_2 son "paralelos": existen constantes geométricas positivas α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 \leq d(x, X_2) \leq \alpha_2$ para todo $x \in X_1$.

Teorema 2 (Contacto): Sea (X, d) un espacio casi-métrico tal que $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \{\rho\}$ con X_1 y X_2 abiertos y disjuntos, $\rho \in X$ y $\emptyset = \overline{X}_1 \bigcap \overline{X}_2$. Supongamos que el grado de contacto entre X_1 y X_2 es cero en el sentido siguiente: existe $C > 0$ tal que para todo $x \in X_1 \quad d(x, \rho) \leq Cd(x, X_2)$. Sean $0 < d_1 < d_2 < \infty$ y μ_i de Borel sobre $X_i, \quad i = 1, 2$, tales que $C_1 r^{d_i} \leq \mu_i(B(x, r) \bigcap X_i) \leq C_2 r^{d_i}$ para todo $x \in X_i$ y $0 < r \leq 1$. Sea $\mu^\alpha(E) = \int_{E \cap X_1} (d(x, \rho))^\alpha \, d\mu_1 + \mu_2(E \bigcap X_2)$, entonces (X, d, μ^α) es un espacio de tipo homogéneo si y sólo si $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Título: Wavelets Spline Simples
Autores: Serrano, Eduardo Pedro
Lugar: ECyT - UNSAM

En diversas aplicaciones, principalmente en el procesamiento de señales o en el estudio de funciones, es conveniente el empleo de la Transformada Wavelet sin decimación, o Semidiscreta. Esta transformada, como bien sabemos, es invariante por traslaciones y permiter detectar características puntuales, patrones o estructuras locales, independientemente de su posición relativa en el dominio de la señal.

Existen múltiples alternativas para seleccionar la la wavelet analizante. La misma no necesariamente debe ser ortogonal o estar asociada a una estructura de Análisis Multirresoución, como lo era la propuesta oportunamente por el autor. Pero, por otra parte, la wavelet debe contar con propiedades que aseguren la eficiente implementación de la transformada. Principalmente, debe estar bien localizada, ser oscilante y ser bien manejable desde el punto de vista numérico.

A partir de estas consideraciones proponemos aquí el empleo de una particular clase de funciones spline como funciones analizantes. Esta clase de wavelets, que denominamos simples, se especifican por el orden spline y el grado de oscilación. Poseen el mínimo soporte posible bajo estas especificaciones. No están asociadas a un Análisis Multirresolulción.

Asumiendo que la función dada puede representarse apropiadamente en un espacio de funciones spline con nodos en una red uniforme, la transformada sin decimación se computa por escalas mediante convoluciones discretas utilizando filtros sencillos.

Exponemos en esta presentación el diseño de estas wavelets, de los filtros para su implementación y algunas aplicaciones. ◇