Análisis Funcional y Análisis Numérico

Título: ALGORITMO DE NEWTON DISCRETO PRECONDICIONADO CON MEMORIA LIMITADA

Autores: H.Scolnik, N.Echebest,M.T.Gurdarucci, M.C. Vacchino
Lugar: La Plata

Este trabajo presenta un algoritmo para resolver problemas de optimización no lineal de gran tamaño. Básicamente, es un método de Newton truncado-discreto que usa un algoritmo de gradientes conjugados precondicionado para definir la dirección de búsqueda. Con el propósito de mejorar la eficiencia del algoritmo de gradientes conjugados discretizado, en problemas mal condicionados, se usa un precondicionador Quasi-Newton con Memoria Limitada. Este precondicionador en cada iteración usa la información recogida en las iteraciones previas. Varias estrategias para este problema y con el mismo objetivo han sido propuestas por diferentes autores (Morales and Nocedal (2000), Nash (1985)). En este trabajo, se guardan las direcciones obtenidas en la aplicación de gradientes conjugados de la iteración previa que reflejen las curvaturas locales extremas del problema. También, cuando el modelo local detecta curvaturas negativas significativas se adiciona esa información a la nueva dirección de búsqueda. Las experiencias numéricas preliminares con problemas test estándar muestran un eficiente comportamiento del algoritmo presentado.

***Keywords**:* método de gradients conjugados, precondicionamiento, métodos de memoria limitada, curvatura negativa.

Título: Cálculo de constantes óptimas
Autores: Cristina Cano, Gustavo Corach, Irene Mosconi, D. Stojanoff
Lugar: Universidad Nacional del Comahue-UBA-UNLP.

Sea $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores acotados en un Espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Sea $||.||$ la notación para la norma espectral de operadores sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. El presente trabajo intenta encontrar las mejores constantes $c_{S,k}$ y $C_{S,k}$ tales que para $\quad k \in \mathbb{R}, \quad S > 0 \quad$ y para todo $\quad X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$\|kX + SXS^{-1} + S^{-1}XS\| \geq c_{S,k}\|X\|,$$

y

$$\|kX + SXS + S^{-1}XS^{-1}\| \geq C_{S,k}\|X\|.$$

Probamos que si $k \in (-2, 2]$ entonces $c_{S,k} = k + 2$; por otro lado si $k \in (-2, 2]$ y existe λ en el espectro de S tal que λ^{-1} también está en el espectro de S entonces $C_{S,k} = k + 2$.
En particular para $S, X \in M_n(\mathbb{C})$, se han encontrado condiciones en los autovalores de S para matrices de orden dos y tres para las cuales se puede determinar la constante $C_{S,k}$ en función de dichos autovalores y el valor de k.

Título: Cálculo de Proyecciones A-autoadjuntas usando Gram-Schmidt

Autores: Celeste Gonzalez, Gustavo Corach y Jorge Antezana
Lugar: Universidad Nacional de La Plata - I.A.M.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $L(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$ y $L(\mathcal{H})^+$ el cono de operadores semidefinidos positivos.

Cada elemento $A \in L(\mathcal{H})^+$ induce una forma sesquilineal acotada $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida por $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle$ $(\xi\ ,\ \eta \in H)$. Dado $T \in L(\mathcal{H})$, se dice A-autoadjunto si es autoadjunto respecto a la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ o equivalentemente si $AT = T^*A$. Dado $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, el par $(A, \mathcal{S})$ se dice compatible si

$$\{\mathcal{Q} \in L(\mathcal{H}) : \mathcal{Q}(\mathcal{H}) = \mathcal{S},\ \mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q},\ A\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^*A\} \neq \varnothing.$$

En este caso, existe un elemento distinguido llamado $P_{A,\mathcal{S}}$. En particular, si $\dim \mathcal{S} < \infty$, el par $(A, \mathcal{S})$ siempre es compatible.

Si $\dim \mathcal{S} < \infty$, a partir de una base $\{s_1, \ldots, s_k\}$ de $\mathcal{S}$ se puede obtener una base A-ortonormal $\{u_1, \ldots, u_k\}$ aplicando un proceso del tipo Gram-Schmidt.

En este trabajo, entre otras cosas se prueba que si $\dim \mathcal{S} \cap N(A) = m$, entonces, existen exactamente m elementos de esta base en $N(A)$. Más aún, se muestra que

$$P_{A,\mathcal{S}} = U_1U_1^*A + U_2U_2^*$$

donde las columnas de U_1 son los vectores de la base A-ortonormal que no pertenecen al $N(A)$ y las de U_2 son los vectores que pertenencen al $N(A)$.

Título: Desarrollo de un algoritmo iterativo de identificación de parámetros utilizando resultados sobre pseudoinversa de una matriz modificada
Autores: Graciela Adriana González
Lugar: Dep. de Matemática. Facultad de Ingeniería. UBA.

Se considera el problema de identificación de parámetro de un sistema no lineal en tiempo discreto dado por:

$$x_{k+1} = \theta^t \varphi_k \tag{1}$$

siendo $\varphi_k = \varphi(x_k, x_{k-1}, ..., u_k, u_{k-1}, ...)$, $\theta \in I\!R^m$ el vector a identificar, x_k y u_k las salidas y entradas del sistema en el tiempo k respectivamente. De la relación (1) se tiene que $A_k\theta = b_k$, donde A_k es la matriz de filas $\varphi_0^t, \varphi_1^t, ..., \varphi_k^t$ y $b_k^t = (x_1, x_2, ..., x_{k+1})$. Surge naturalmente la idea de estimar θ a través de

$$\hat{\theta}_{k+1} = A_k^\dagger b_k \tag{2}$$

siendo $A_k^\dagger$ la pseudoinversa de Moore-Penrose de A_k.

Con el propósito de reformular (2) para obtener el estimador recursivamente, se recurre a resultados existentes sobre la pseudoinversa de matrices modificadas. Éstos permiten calcular $A_{k+1}^\dagger$ a partir de $A_k^\dagger$ y a su vez, deducir una fórmula iterativa para obtener $\hat{\theta}_{k+1}$. Cabe destacar que a diferencia de lo desarrollado en la bibliografía previa, no se imponen aquí restricciones adicionales sobre la información entrada-salida del sistema. El objetivo de esta presentación es mostrar la derivación del algoritmo, la confrontación de sus alcances con los resultados anteriores así como sus propiedades más relevantes.

Título: Estabilidad de un método de Galerkin para un sistema no lineal
Autores: Bergallo, M.; Faure, O.; Spies, R.
Lugar: Universidad Nacional del Litoral

Se analizan las condiciones de estabilidad de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) de un método espectral de Galerkin para un sistema de shallow-water con condiciones de borde periódicas.
Dicho sistema está dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vu_y - v + z_x - \nu_0 \triangle u & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y + u + z_y - \nu_0 \triangle v & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} + uz_x + vz_y + (g_0 + z)(u_x + v_y) - \kappa_0 \triangle z & = & F \end{array} \right.$$

donde u y v son las componentes del campo de velocidades y z es la altura geopotencial.

Título: Frames y proyecciones.
Autores: Jorge Antezana, Gustavo Corach, Mariano Ruiz y D. Stojanoff
Lugar: Universidad Nacional de La Plata- I.A.M.

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un frame en $\mathcal{H}$ si $\forall\, f \in \mathcal{H}$ se satisface la siguiente desigualdad

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\,\langle f, f_n\rangle\,|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Las constantes A y B son denominadas cotas del frame. Cuando $A = B$ el frame se dice ajustado y se dice además normalizado si $A = B = 1$. A cada frame se le asigna canonicamente un operador $T : \ell^2 \to \mathcal{H}$ definido por $T(e_n) = f_n$ el cual se denomina operador pre-frame. Una base de Riesz es un frame cuyo operador pre-frame es inversible. En particular, las bases ortonormales son bases de Riesz ajustadas y normalizadas.

Un resultado reciente de Han y Larson establece que todo frame ajustado y normalizado se obtiene al proyectar ortogonalmente una base ortonormal se algún espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que contiene a $\mathcal{H}$.

En el presente trabajo se generaliza el resultado de Han y Larson en dos direcciones. En primer lugar se prueba que todo frame $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con constantes A y B se obtiene al proyectar ortogonalmente una base de Riesz (con las mismas constantes) de algún espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que contiene a $\mathcal{H}$. Por otro lado, se dan condiciones necesarias y suficientes para que dado un frame $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathcal{H}$, existan un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$, una base ortonormal $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{K}$ y una proyección obliqua Q de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{H}$ de modo que $Q(b_n) = f_n$.

Título: Mayorizacion conjunta en factores finitos
Autores: M. Argerami, P. Massey y D. Stojanoff
Lugar: FCE- UNLP

Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neuman de centro trivial y traza finita y fiel i.e, un factor finito en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Una familia Abeliana $(a_i)_{i=1}^n$ en $\mathcal{M}_{sa}$ es una n-upla de elementos autoadjuntos que conmutan dos a dos. Dadas dos tales familias $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$ definimos la relación "$(b_i)_{i=1}^n$ mayoriza conjuntamente a la familia $(a_i)_{i=1}^n$" , notada $(b_i)_{i=1}^n \succ (a_i)_{i=1}^n$ en términos del espectro y medidas espectrales conjuntas de las familias. Esta noción representa un orden entre las (distribuciones) medidas conjuntas de familias Abelianas en $\times_{i=1}^n \mathcal{M}$. Se obtienen las siguientes propiedades equivalentes a $(b_i)_{i=1}^n \succ (a_i)_{i=1}^n$:

1. $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(b_1, \ldots, b_n))$.
2. Existe un mapeo positivo unital que preserva la traza $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tal que $a_i = \Phi(b_i)$, $i = 1, \ldots, n$.
3. $\tau(f(a_1, \ldots, a_n)) \leq \tau(f(b_1, \ldots, b_n))$ para cada función continua convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Se obtiene que $(b_i)_{i=1}^n \succ (a_i)_{i=1}^n$ y $(a_i)_{i=1}^n \succ (b_i)_{i=1}^n$ equivale a la condición $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{M}}}(b_1, \ldots, b_n)$. ($\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(b_1, \ldots, b_n)$ es la órbita unitaria conjunta i.e, $\{(u^*b_1u, \ldots, u^*b_nu),\ u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})\}$).

La noción de mayorización conjunta generaliza diferentes nociones de mayorización definidas por Kamei [2] , Hiai [1] y en [3].

Referencias.

[1] F. Hiai, *Spectral majorization between normal operators in von Neumann algebras*, Op. alg and Op. theory (Craiova, 1989), 78–115.

[2] E. Kamei,*Majorization in finite factors*, Math. Jap. 28, No.4(1983), 495-499.

[3] F. Martínez Pería, P. Massey and L. Silvestre, *Weak matrix majorization* (preprint).

Título: Minimización del flujo total en un problema elíptico mixto con restricciones

Autores: María Cristina Sanziel - Domingo A. Tarzia
Lugar: Consejo de Investigaciones U.N.Rosario Univ.Austral-CONICET

Se considera un problema estacionario de conducción del calor en un material Ω que ocupa un dominio acotado en R^n con frontera $\Gamma = \partial\Omega$. La frontera está compuesta de dos porciones Γ_1 y Γ_2. En Γ_2 se impone un flujo de calor q > 0, mientras que sobre Γ_1 el flujo de calor impuesto verifica una ley de tipo Fourier con coeficiente de transferencia α > 0.

El objetivo de este trabajo es minimizar el flujo total impuesto sobre la frontera Γ_2 de manera que el material esté en la fase sólida, es decir:

$$\textit{Minimizar } F(q) = \int_{\Gamma_2} q(s)ds \textit{ con la restricción } u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

En Tabacman-Tarzia (Journal Diff. Eq., 77 (1989), 16-37) se estudió este problema y se estableció que se trata de un problema de Stefan a dos fases, si el flujo q se encuentra entre un flujo mínimo y un flujo máximo, los que dependen del coeficiente α y de la temperatura exterior. Por otra parte, en González-Tarzia (J. Optim. Th. Appl., 65 (1990) 245-256) se planteó un problema con condición de temperatura impuesta sobre la porción de frontera Γ_1 y se maximizó el flujo total impuesto sobre la frontera Γ_2, con la restricción de que el material esté en la fase líquida.

A fin de resolver el problema de optimización planteado, empleando el método de los elementos finitos, se transforma el problema original en un problema de programación lineal.

Título: Productos de distribuciones y N-representación.
Autores: Pedro Catuogno, Sandra Mónica Molina, Christian Olivera.
Lugar: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.N. de Mar del Plata.

En este trabajo se han construido dos métodos para multiplicar distribuciones temperadas. Estos métodos están basados en el teorema de N-representación para $\mathcal{S}'$ (ver [2]). Este teorema establece que toda $S \in \mathcal{S}'$ puede ser representada en serie de Hermite $S = \sum_n b_n \phi_n$ donde $\{\phi_n\}$ son las funciones de Hermite en $\mathbb{R}$ dadas por $\phi_n(x) = (n!)^{-\frac{1}{2}}(A^\dagger)^n \phi_0(x)$ donde $\phi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$, $b_n =< S, \phi_n >$. En este contexto, se han definido dos productos de la siguiente forma: sean S y T en $\mathcal{S}'$ con N-representación $S = \sum_n b_n \phi_n$ y $T = \sum_n b'_n \phi_n$ respectivamente. Sean $S_m = \sum_{n=0}^m b_i \phi_i$ y $T_m = \sum_{i=0}^m b'_i \phi_i$, definimos los coeficientes de Hermite para el producto $[S]T$ como

$$c_k = \lim_{m \to \infty} < T, S_m \phi_k >$$

si el límite existe y para ciertas condiciones para los coeficientes c_k. Análogamente definimos $S[T]$. Estudiamos además algunas propiedades de este producto y obtuvimos algunos ejemplos a saber: $[H]\delta = \frac{\delta}{2}$, $[\delta]vp(\frac{1}{x}) = -\delta'$ y $[\delta^+]\delta^+$. Estos cálculos no son simples pero son posibles gracias a las buenas propiedades de las funciones de Hermite.

Bibliografía

[1] M.Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations.* Pitman Research Notes in Math. Series 259. Ed Longman Science and Technology, 1993.
[2] B. Simon, *Distributions and Their Hermite Expansions.* Journal of Mathematical Physics, Vol. 12, 1 (1971), 140-148.
[3] L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1966.

Título: Proyecciones Oblicuas

Autores: A. Maestripieri y F. Martínez Pería
Lugar: IAM-CONICET, UNGS y UNLP

Dado un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\, .\,,.\, \rangle)$, todo operador autoadjunto $B \in L(\mathcal{H})$ define una forma sequilineal (acotada) sobre $\mathcal{H}$ mediante la fórmula

$$[\, x, y\,] := \langle\, Bx, y\,\rangle\,, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Un operador $A \in L(\mathcal{H})$ es B-*autoadjunto* si, para todo $x, y \in \mathcal{H}$, $[\, Ax, y\,] = [\, x, Ay\,]$. Es fácil ver que A es B-autoadjunto si y sólo si $BA = A^*B$.

Si $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ estudiamos la existencia de proyecciones B-autoadjuntas con rango $\mathcal{S}$, es decir, cuándo el conjunto $\mathcal{P}(B, \mathcal{S}) := \left\{Q = Q^2 \in L(\mathcal{H}) : R(Q) = S,\, BQ = Q^*B\right\}$ es no vacío. Si B es una reflexión (es decir, $B = B^* = B^{-1}$) entonces $(\mathcal{H}, [\, .\,,.\,])$ es un *espacio de Krein* y estas proyecciones ya han sido caracterizadas (ver [1]); y si $B \geq 0$ varias propiedades de $\mathcal{P}(B, \mathcal{S})$ pueden hallarse en [2].

En el caso general, damos condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{P}(B, \mathcal{S})$ sea no vacío, por ejemplo, mediante ángulos entre subespacios, descomposiciones del rango de B y de los rangos de $|B|$ y de $|B|^{1/2}$, donde $|B| = (B^*B)^{1/2}$.

Referencias:

1. *Linear Operators in spaces with an indefinite metric*, I. S. Iokhvidov, T. Ya. Azizov; John Wiley and sons, 1989.

2. *Oblique projections and Schur complements*, G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff; Acta Sci. Math. (Szeged), 67 (2001), 337-256.

Título: Resolución de Ecuaciones Diferenciales utilizando Series tipo delta

Autores: Marta García-Manuel Aguirre
Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Sea q un número natural fijo y Z el espacio de las funciones cuya transformada de Fourier son elementos de D ([1], pag. 198), definimos el conjunto M_Z como,

$$M_Z = \left\{ \phi \in Z(\Re_+) : \exists\ q \in N \ / \ \begin{array}{ll} \mu_p = 0 & 1 \leq p \leq q \\ \mu_p = 1 & p = 0 \text{ ó } p > q \end{array} \right\} \quad p = 0, 1, 2, ...$$

donde μ_p es el momento de una función, definido por $\mu_p = \int\limits_{\Re_+} \phi(x)\, x^p dx$.

Dada la fórmula

$$T_\phi = \delta(x-1) - \sum_{j=1}^{q} \frac{(-1)^j}{j!} \delta^{(j)}(x)$$

para cada q fijo, donde q = 1 , 2 , 3 , ... y $\phi \in M_Z$, siendo δ la delta de Dirac y

$$\langle T_\phi, \varphi \rangle = \int_0^\infty \phi(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \text{para } \varphi \in Z$$

(comunicada en la UMA2003) , la cual proporciona para cada q fijo una familia de funciones que son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias.

En este trabajo se pretende investigar ecuaciones diferenciales ordinarias para las cuales sea posible encontrar valores de q que permitan dar soluciones tipo delta de dichas ecuaciones.

References

[1] Zemanian A. H. - Distribution Theory and Transform Analysis. Mc Graw Hill Book Company. New York 1965.

Título: Transformada de Aluthje en Ideales Schatten.
Autores: Jorge Antezana, Pedro Massey y Demetrio Stojanoff
Lugar: Universidad Nacional de La Plata- I.A.M.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (separable) y $L(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores acotados sobre $\mathcal{H}$ dotado del peso tracial tr canónico. Para cada $p \in [1, \infty)$ el ideal de Schatten $\mathcal{S}_p$ se define como

$$\mathcal{S}_p = \{T \in L(\mathcal{H}) : \ \mathrm{tr}(|T|^p) < \infty\}.$$

Dicho ideal dotado con norma $\|\cdot\|_p$ definida por $\|T\|_p = \mathrm{tr}(|T|^p)^{1/p}$, es un espacio de Banach. Por otro lado, dado $T \in L(\mathcal{H})$ con descomposición polar $T = U|T|$, para cada $\lambda \in [0, 1]$ se define su λ-transformación de Aluthge $\Delta_\lambda(T)$ del siguiente modo:

$$\Delta_\lambda(T) = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda}.$$

En la presente comunicación se estudian las propiedades de la transformaciones de Aluthge en los ideales Schatten. Entre otras cosas se prueba que dado $T \in \mathcal{S}_p$, $\|T\|_p \leq \|\Delta_\lambda(T)\|_p$ y la igualdad se cumple si y sólo si T es normal. Esto nos permite demostrar que en espacios de dimensión finita, si definimos inductivamente $\Delta_\lambda^n(T) = \Delta_\lambda\left(\Delta_\lambda^{n-1}(T)\right)$, los puntos de acumulación de la sucesión $\{\Delta_\lambda^n(T)\}$ son normales. De esto se desprende que $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|\Delta_\lambda^n(T)\|_{sp}$ y $cc(\sigma(T)) = \bigcap_{n=1}^\infty W(\Delta_\lambda^n(T))$, donde $\|\cdot\|_{sp}$, $r(\cdot)$, $cc(\cdot)$ y $W(\cdot)$ representan norma y radio espectral, cápsula convexa y rango numérico respectivamente.