Algebra, Geometría Algebraica y Geometría Computacional

Título: Construcción FRT generalizada y pegado de modelos integrables
Autores: Sergio D. Grillo
Lugar: Centro Atómico Bariloche-Instituto Balseiro

En este trabajo presentaremos la categoría de los espacios cuánticos equipados EQA, dada por álgebras cuadráticas dotadas de una estructura adicional, y veremos cómo a partir de la misma es posible obtener las biálgebras de Faddeev-Reshetikhin-Takhtadzhyan (FRT). Definiremos distintos monoides e involuciones sobre ella, que indicaremos por los símbolos $\boxtimes_\epsilon$ y $\dagger_\epsilon$, respectivamente, siendo $\epsilon = -, 0, +$, y mostraremos que, respecto de cada una de estas estructuras, EQA tiene objetos coHom internos a izquierda (resp. derecha) dados por $\underline{hom}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}] = \mathfrak{A} \boxtimes_\epsilon \mathfrak{B}^{\dagger_\epsilon}$ (resp. $\underline{hom}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}] = \mathfrak{A} \boxtimes_{-\epsilon} \mathfrak{B}^{\dagger_{-\epsilon}}$). Es para $\epsilon = +$ que los objetos $\underline{end}\,[\mathfrak{A}] = \underline{hom}\,[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ definen precisamente las álgebras de la construcción FRT, mientras que los $\underline{hom}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$ dan lugar a lo que hemos llamado sus *versiones rectangulares*. Introduciremos luego el parámetro espectral, obteniendo así las álgebras de Yang-Baxter usuales y las rectangulares correspondientes. En términos de las últimas definiremos un proceso de pegado de sistemas físicos exactamente solubles, poniendo una vez más en evidencia la profunda conexión que existe entre esta clase de estructuras algebraicas y la propiedad de integrabilidad.

Título: Derivaciones en álgebras de matrices triangulares

Autores: Carlos C. Pea Ana L. Barrenechea
Lugar: UNCPBA - FCExactas - Dpto. de Matemática - NuCoMPA - Tandil.

No puede determinarse, en general, la estructura de derivaciones en álgebras de Banach. La noción de UHF álgebras (*uniformly hyperfinite algebras*) debida a J. Gimm (J. G.: *On certain class of operator algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **95**, 318 - 340, 1960) permite avances en esta materia en el marco de álgebras *estrelladas.* Se trata precisamente de álgebras C - estrella unitarias munidas de una sucesión creciente de álgebras matriciales finito dimensionales cuya unión es densa. En particular, nos hemos interesado en el estudio de derivaciones en álgebras de Banach de matrices triangulares en el sentido de B. Forrest & L. W. Marcoux (F & M: *Derivations of triangular Banach algebras.* Indiana University Math. Journal, Vol. 45, no. 2, 1996). Establecemos entonces la estructura de derivaciones en álgebras triangulares sobre anillos generales, consideramos varios ejemplos y determinamos la dimensión del módulo de derivaciones sobre el centro del anillo subyacente.

Título: Dimensión de representación de álgebras inclinadas y álgebras laura.

Autores: Ibrahim Assem, María Inés Platzeck y Sonia Trepode.
Lugar: Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

La dimensión de representación de un álgebra de artin fue definida por Maurice Auslander a comienzos de la década del 70, como el ínfimo de las dimensiones globales de los anillos de endomorfismos de los módulos finitamente generados que son simultáneamente generadores y cogeneradores de la categoría de módulos.
Demostramos que la dimensión de representación de un álgebra inclinada, o de un álgebra laura estricta, es menor o igual que tres.

Esta es comunicación de un trabajo conjunto con Ibrahim Assem y Sonia Trepode.

Título: Ejemplos de Grupoides Cuánticos
Autores: Nicolás Andruskiewitsch y Martín Mombelli
Lugar: Fa.M.A.F.- U.N.C

Las categorías de fusión (categorías semisimples tensoriales con ciertas propiedades extras), tienen varias aplicaciones a distintas áreas de matemática y física, tales como a variedades topológicas de dimensión baja, a la teoría de algebras de Hopf semisimples, etc.

Una fuente importante de ejemplos de categorías de fusión viene dada por la categoría de representaciones de álgebras de Hopf débiles conexas semisimples. Recientemente, en [AN] los autores introducen una construcción de álgebras de Hopf débiles $\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T}$, a partir de grupoides apareados $(\mathcal{V},\mathcal{H})$ y un cierto par de 2-cociclos $(\sigma,\tau)\in \mathrm{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H})$. Cuando el grupoide $\mathcal{V}$ es conexo, la categoría $\mathrm{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T})$ es de fusión. En [AN] también se prueba que el grupo $\mathrm{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H})$ cabe en la llamada sucesión exacta de Kac

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow H^1(\mathcal{D},\underline{\Bbbk^\times}) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\mathcal{H},\underline{\Bbbk^\times})\oplus H^1(\mathcal{V},\underline{\Bbbk^\times}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\Bbbk\,\mathcal{T})\\
&\longrightarrow H^2(\mathcal{D},\underline{\Bbbk^\times}) \xrightarrow{\text{res}} H^2(\mathcal{H},\underline{\Bbbk^\times})\oplus H^2(\mathcal{V},\underline{\Bbbk^\times}) \longrightarrow \mathrm{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H})\\
&\longrightarrow H^3(\mathcal{D},\underline{\mathbb{K}^\times}) \xrightarrow{\text{res}} H^3(\mathcal{H},\underline{\Bbbk^\times})\oplus H^3(\mathcal{V},\underline{\Bbbk^\times}) \longrightarrow \dots
\end{aligned}$$

El propósito de este trabajo es mostrar ejemplos explícitos de grupoides apareados $(\mathcal{V},\mathcal{H})$ y el cálculo de $\mathrm{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H})$ vía la sucesión exacta de Kac y vía reducción de la cohomología de grupoides a la cohomología de grupos.

References

[AM] N. Andruskiewitsch and J.M. Mombelli, *Examples of weak Hopf algebras arising from vacant double groupoids* , preprint, `math.QA/0405374`.

[AN] N. Andruskiewitsch and S. Natale, *Double Categories and Quantum Groupoids*, preprint, `math.QA/0308228`.

Título: Estructura de Hodge polarizada para la Cohomología de Orbifold
Autores: Javier Fernandez
Lugar: Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo

La cohomología de una variedad proyectiva suave X de dimensión n, $H := \oplus_{p,q} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$, es sustrato para múltiples estructuras algebraicas. Entre otras, el teorema de Lefschetz "difícil", la descomposición de Lefschetz y, sobre las partes primitivas de $H^k(X, \mathbb{C})$, las relaciones bilineales de Hodge–Riemann. Todas estas propiedades quedan encapsuladas en la existencia de una estructura de Hodge mixta y polarizada de peso n sobre H.

Varios de los resultados válidos para la cohomología de variedades suaves se extienden a variedades con singularidades, por ejemplo, a las variedades que son localmente cocientes de variedades suaves por un grupo finito. Estas variedades son conocidas como *orbifolds*. En el contexto de la simetría especular, se introdujo una nueva teoría de cohomología —llamada *de orbifold*— para este tipo de espacios. Aditivamente, la cohomología de orbifold es una suma directa de la cohomología de ciertos subespacios "singulares" del orbifold, con un corrimiento determinado por la acción del grupo local.

Nuestro resultado muestra que la cohomología total de orbifold satisface propiedades similares a las descriptas anteriormente para variedades suaves (es una estructura de Hodge mixta y polarizada) si el orbifold es compacto, proyectivo, sus grupos locales son subgrupos de $SL(n, \mathbb{C})$ y sus índices de corrimiento satisfacen una relación que llamamos de Lefschetz.

Título: Fórmulas para trazas en álgebras cero-dimensionales
Autores: Carlos DÁndrea - Gabriela Jeronimo
Lugar: Department of Mathematics, University of California, Berkeley
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero y sea $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros en $\overline{\mathbb{K}}^n$. Bajo estas hipótesis, el cociente $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}$, es un álgebra cero-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Si $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ son polinomios tales que q no es un divisor de cero en A, la multiplicación por p/q induce una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $\phi_{p/q} : A \to A$, $\phi_{p/q}([f]) = [\frac{p}{q}.f]$.
Estudiamos la dependencia de la traza de esta aplicación lineal con respecto a los datos: el ideal $\mathcal{I}$ y los polinomios p, q.
En primer lugar, establecemos una expresión para la traza de $\phi_{p/q}$ como una función racional en términos de la forma de Chow generalizada del ideal $\mathcal{I}$. A continuación, consideramos el caso en que $\mathcal{I}$ es una intersección completa en el toro y p y q son polinomios genéricos con soportes prefijados, obteniendo fórmulas para numeradores y denominadores de trazas en términos de resultantes ralas. Para terminar, exhibimos fórmulas para la factorización del denominador de la traza, análogas a las fórmulas conocidas para denominadores de residuos en el toro.

Título: La función generadora exponencial en el Algebra de Weyl
Autores: José Luis Aguado
Lugar: Unicen-Tandil

Dado un cuerpo K de característica cero , sea $\mathbb{S}_n(K) = K[[X_1, ..., X_n]]$ el anillo de series de potencias formales en las n indeterminadas $X_1, ..., X_n$, y $\mathbf{m}$ el ideal maximal de $\mathbb{S}_n(K)$.

Sea $D_n(K)$ la K-álgebra de Weyl de operadores diferenciales de $\mathbb{S}_n(K)$ generada por las derivaciones $D_Q = \sum_{i=1}^n q_i \partial_i$ donde los q_i operan por multiplicación y ∂_i denota $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$. Sea $\mu : gr(D_n(K)) \to D_n(K)$ el K-isomorfismo natural de espacios vectoriales, donde $gr(D_n(K)) = \mathbb{S}_n(K)\left[\overline{\partial_1}, \ldots, \overline{\partial_n}\right]$ es el anillo graduado asociado. Para $D_Q \in D_n(K)$ ponemos $\widetilde{D}_Q = \mu^{-1}(D_Q)$.

Sea $Q_1 = (q_{1,1}, ..., q_{1,n}) \in (\mathbf{m}^2)^n$ y se define la sucesión $Q_j = (q_{j,1}, ..., q_{j,n})$ para $j \geq 2$ por $q_{j,i} = \frac{1}{j} D_{Q_1}\left(q_{(j-1),i}\right), i = 1, ..., n$. Es decir $Q_j = \frac{1}{j} D_{Q_1}(Q_{j-1})$. Desde que $q_{j,i} \in \mathbf{m}^{j+1}$ para todo i, las sumas parciales sobre j son convergentes en la topología $\mathbf{m}-$ádica de $\mathbb{S}_n(K)$, y se puede poner:

$$q_i = \sum_{j=1}^{\infty} q_{j,i} \text{ para } i = 1, ..., n,\ Q = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j = (q_1, ..., q_n)$$

Sean D_Q la correpondiente derivación y $\widetilde{D}_Q$ definida como antes. Sea además $f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{D}_{Q_j} \lambda^j \in gr(D_n(K))[[\lambda]]$ la función generadora ordinaria de la sucesión $\widetilde{D}_{Q_j}$.

Se prueba que para cada $m \geq 1$ vale:

$$\frac{1}{m!} D_{Q_1}^m = \mu\left(\left\{e^f\right\}_m\right) \tag{1}$$

donde e^f es la función generadora exponencial de $f(\lambda)^k$ y $\{\}_m$ denota el coeficiente de λ^m.

Título: Rango asociado a una curva proyectiva
Autores: Gonzalo Comas
Lugar: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ un curva proyectiva, no singular y no degenerada de género g. Definimos el rango asociado a X de un punto $p \in \mathbb{P}^n$ como el menor entero k tal que p pertenece a una variedad lineal generada por k puntos de X.

Esta noción de rango está relacionada con las variedades secantes de la curva X, y generaliza la definición de rango de una forma binaria. Por su parte, esta definición se relaciona con el Problema de Waring referente a la escritura de polinomios como suma de potencias.

En esta presentación se expondrán los resultados obtenidos en el caso en que X es una curva elíptica (esto es, el género de X es uno). Entre ellos daremos la descripción de los conjuntos de puntos de rango constante. Finalmente mostraremos algunos resultados en el caso en que X es una curva de género superior.

Título: Sistemas de parámetros para ecuaciones diferenciales ordinarias polinomiales

Autores: Lisi DÁlfonso, Gabriela Jeronimo y Pablo Solernó
Lugar: Dep. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias polinomiales, es posible asociarle un ideal diferencial en un anillo de polinomios diferenciales, lo que permite el estudio de diversas cuestiones relacionadas con la resolución del sistema utilizando métodos algebraicos.

En este trabajo, consideramos ciertos sistemas de ecuaciones álgebro-diferenciales de primer orden relacionados con el estudio de problemas en teoría de control. Nos concentramos en el cálculo de un *sistema de parámetros* para el ideal primo asociado al sistema (un conjunto maximal de variables diferencialmente independientes con respecto al ideal con cierta propiedad técnica adicional), un posible punto de partida para el cálculo de una representación resolvente.

Calculamos la dimensión diferencial del ideal y damos fórmulas para su *función de Hilbert diferencial* en términos de rangos de matrices jacobianas construidas a partir de las ecuaciones del sistema, obteniendo en particular, el *orden* del ideal. Estos resultados extienden los obtenidos recientemente en el caso cero-dimensional por G. Matera y A. Sedoglavic. Presentamos también un algoritmo para el cálculo de una base de trascendencia diferencial de la extensión de cuerpos diferenciales inducida. Finalmente establecemos condiciones para que una base de trascendencia sea un sistema de parámetros del ideal, y damos un algoritmo para el cálculo de sistemas de parámetros.

Título: Sobre algebras de Hopf no semisimples de dimension finita
Autores: Gaston Andres Garcia
Lugar: Ludwig-Maximilians Universitaet, Munich, Alemania

Se mostrarán algunos resultados generales sobre álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado y de característica cero y luego se aplicarán al caso particular de álgebras de Hopf H no semisimples de dimensión p^3 sobre k, donde p es un número primo impar. De acuerdo con los elementos de tipo grupo de H y H^*, se puede descomponer el estudio en 10 casos. Se mostrará que en 8 de los 10 casos es posible determinar la estructura de H.

Por otro lado, utilizando una caracterización de las representaciones simples del producto cruzado de un álgebra de Taft de dimensión p^2 por un álgebra de grupo de orden p, se dará tambien una clasificación parcial de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión p^3 sobre k. Una consecuencia directa de esta clasificación es que toda álgebra de Hopf H de dimensión p^3 sobre k que es ribbon es un álgebra de grupo o H es isomorfa a un núcleo de Frobenius-Lusztig.

Finalmente, usando algunas cotas conocidas sobre la dimensión del primer término de la filtración del coradical, se dará la clasificación completa de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión 27 sobre k.

Título: T-álgebra del Hipercubo
Autores: F. Levstein, C. Maldonado, D. Penazzi
Lugar: FaMAF, UNC

Dado $\mathcal{H} = \mathbb{Z}_2^n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{H}$ es sabido que ∂ define una distancia en $\mathcal{H}$ del siguiente modo:

$$\partial(x, y) = \#\{i \ : \ x_i \neq y_i, \ 1 \leq i \leq n\}$$

Denominamos hipercubo a $\mathcal{H}$. Estudiamos la T-álgebra asociada a $\mathcal{H}$ según [4]. Comparamos resultados con [2] y [3]. Comentamos como se generaliza el resultado para los casos $\mathcal{H} = \mathbb{Z}_q^n$

Referencias

[1] E. Bannai and T.Ito. *Algebraic Combinatorics I:Association Schemes.*Benjamin Cummings,London,1984

[2] Go J. *The Terwilliger algebra of the hypercube* Europ. J. Comb. 23 No 4 2002.

[3] J.M. Marco and J. Parcet, On the natural representation of $S(\Omega)$ into $L^2(P(\Omega))$: Discrete harmonics and Fourier transform, *J. Comb. Theory, Ser A* **100** No 1 (2002) ,153-175.

[4] P. Terwilliger. *The subsconstituent algebra of an association scheme I, II, III.* J. Alg. Combin. 1992, 1993, 1993 (resp.)

Título: Teoremas de codimensión en variedades tóricas compactas
Autores: David Cox y Alicia Dickenstein
Lugar: Amherst College, USA y Dto. de Matematica, FCEyN, UBA

Sea X una variedad tórica compacta con anillo coordenado homogéneo S. En este trabajo, calculamos cotas inferiores y superiores para la codimension en grado crítico, del ideal generado por $\dim(X)+1$ polinomios multihomogéneos de S sin ceros comunes en X, cuando la familia asociada de polítopos es esencial. En particular, la codimensión es siempre no nula. Damos asimismo condiciones geométricas sobre los polítopos, bajo las cuales la codimensión en grado crítico alcanza la cota superior que presentamos. Cuando los divisores asociados son big y nef, nuestros resultados implican que la codimensión es 1, lo cual generaliza varios resultados previos.

Título: Un algoritmo para el cálculo de puntos racionales de variedades sobre cuerpos finitos.
Autores: Antonio Cafure(1), Guillermo Matera(2)
Lugar: (1) Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires. (2) Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento

Consideremos un conjunto finito de polinomios $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ con $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elementos y sea V la variedad afín definida por ellos, es decir,

$$V := \{x \in \overline{\mathbb{F}}_q^n : F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0\},$$

donde $\overline{\mathbb{F}}_q^n$ es la clausura algebraica de $\mathbb{F}_q$. Decimos que x es un punto q–racional de la variedad V si es un elemento de $V \cap \mathbb{F}_q^n$.

Encontrar puntos racionales constituye un problema importante tanto en matemática como en computación con una cantidad de aplicaciones: esquemas criptográficos multivariados, teoría de códigos, combinatoria, etc.

En este trabajo exhibimos un algoritmo que encuentra un punto q–racional de una variedad V.

Sean $F_1, , \ldots, , F_r \in \mathbb{F}_q[X_1, , \ldots, , X_n]$ polinomios de grado acotado por d y tales que constituyen una sucesión regular. Supongamos que para cada $1 \leq s \leq r$, los polinomios $F_1, , \ldots, , F_s$ generan un ideal radical de $\mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ y consideremos las variedades $V_s := V(F_1, , \ldots, , F_s)$. Sea $\delta := \max_{1 \leq s \leq r} \deg V_s$. Supongamos además que la variedad $V := V_r$ es absolutamente irreducible y que $q > 8n^2 d\delta_r^4$. Bajo estas condiciones existe un algoritmo que encuentra un punto q–racional de V y cuya complejidad es esencialmente cuadrática en δ y el logaritmo de q. En particular, nuestro algoritmo es el primero en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales sobre cuerpos finitos con complejidad polinomial en el número de Bézout del sistema.