

**Autores: José Luis Aguado**  
**Lugar: UNCPBA-Tandil**

---

## FÓRMULAS DE TIPO LEIBNIZ PARA DERIVACIONES INTERNAS GENERALIZADAS EN CARACTERÍSTICA POSITIVA

Dada un álgebra  $A$  y dos endomorfismos  $\sigma, \tau$  de  $A$ , para cada  $a \in A$ , se define un nuevo endomorfismo  $\delta_a : A \rightarrow A$  por  $\delta_a(x) = a\tau(x) - \sigma(x)a$ . Entonces  $\delta_a$  verifica que:  $\delta_a(xy) = \delta_a(x)\tau(y) + \sigma(x)\delta_a(y)$ . Decimos que  $\delta_a$  es una  $(\sigma, \tau)$ -derivación (interna) de  $A$ .

Si  $K$  es un cuerpo perfecto de característica  $p > 0$  y  $A = K[[X]]$ , se obtienen fórmulas de tipo Leibniz para  $\delta_a^n(x_1x_2)$  y  $\delta_a^n(x_1x_2 \cdots x_m)$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , donde  $\delta_a$  es una  $(\sigma, \tau)$ -derivación interna de  $A$  y  $\sigma, \tau$  se sustituyen oportunamente por endomorfismos del tipo 1)  $F_h : a \rightarrow a^{p^h}$ , el morfismo de Frobenius con  $h \geq 0$  y 2)  $D_h = \frac{\partial}{\partial X^{p^h}}$ , la derivación de Dieudonné de orden  $p^h$ .

---

**Autores: Antonio Cafure (1,2), Guillermo Matera (2), Ariel Weissbein (3)**  
**Lugar: (1) Universidad de Buenos Aires. (2) Universidad Nacional de General Sarmiento. (3) CoreLabs.**

---

## INVERSIÓN EFICIENTE DE MORFISMOS POLINOMIALES SOBRE CUERPOS FINITOS

Sean  $F_1, \dots, F_n$  polinomios en  $n$  indeterminadas con coeficientes en  $\mathbb{F}_q$ , el cuerpo finito de  $q$  elementos, de grado a lo sumo  $d$ . Consideramos el morfismo  $F : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  definido como  $F(x) := (F_1(x), \dots, F_n(x))$ . Asumiendo que la restricción de  $F$  a  $\mathbb{F}_q^n$  es biyectiva, desarrollamos un algoritmo que, dado  $y^{(0)} \in \mathbb{F}_q^n$ , calcula el único punto  $x^{(0)} \in \mathbb{F}_q^n$  tal que  $F(x^{(0)}) = y^{(0)}$ . Para eso, pensamos el gráfico de  $F$  como una subvariedad  $V \subset \mathbb{A}^{2n}$  y consideramos la proyección  $\pi : V \rightarrow \mathbb{A}^n$  en las variables  $Y_1, \dots, Y_n$ . La idea es deformar el sistema  $F(X) = y^{(0)}$  en un sistema  $F(X) = F(x^{(1)})$ , donde  $x^{(1)}$  es un punto adecuado con coordenadas en una extensión finita de  $\mathbb{F}_q$ . Nuestro resultado es el siguiente:

**Teorema** *Si los polinomios  $F_1, \dots, F_n$  se evalúan con  $\mathcal{T}$  operaciones sobre  $\mathbb{F}_q$ , la única solución  $q$ -racional del sistema  $F(X) = y^{(0)}$  puede calcularse con  $O((\mathcal{T} + n^4 + D^2)n\delta^2)$  operaciones sobre  $\mathbb{F}_q$ , donde  $\delta$  denota el grado de  $V$  y  $D$ , el grado del morfismo  $\pi$ .*

El interés por este tipo de problemas se origina en los casos en que el morfismo  $F$  codifica alguna permutación de un esquema criptográfico.

---

### ÁLGEBRA DE NORTON DE CIERTOS GRAFOS DE DISTANCIA REGULAR

Dado un conjunto de vértices  $X$  y una distancia  $d$  definimos *grafos de distancia regular*. Consideramos  $L^2(X)$  el espacio de funciones indexadas por  $X$  y en dicho espacio el operador

$$\mathcal{L} : L^2(X) \rightarrow L^2(X), \quad \mathcal{L}f(x) = \sum_{y:d(x,y)=1} f(y).$$

Se tiene una descomposición de  $L^2(X)$  en autoespacios  $V_\lambda$  de  $\mathcal{L}$ ,  $L^2(X) = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ .

En cada  $V_\lambda$  se puede definir una estructura de álgebra  $(V_\lambda, \star)$ , conocida como *álgebra de Norton*, de la siguiente forma:

$$f \star g = \pi_\lambda(f \circ g) \quad f, g \in V_\lambda$$

donde  $\pi_\lambda$  es la proyección a  $V_\lambda$  y  $\circ$  es el producto de Hadamard en  $L^2(\Omega)$ .

Tomando como ejemplo los grafos de Johnson y los grafos de espacios polares duales, veremos una construcción de un conjunto de generadores de  $V_\lambda$  en los cuales el producto en el álgebra de Norton tiene una expansión sencilla.

### REFERENCIAS

- [1] Brouwer, Cohen, Neumaier, *Distance-Regular Graphs*. Springer-V., 1989.
- [2] Cameron, Goethals, Seidel, The Krein condition, spherical designs, Norton algebras and permutation groups, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. (A)* **81** (1978).
- [3] Stanton, Orthogonal polynomials and Chevalley groups. In *Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications* (Eds Askey, Koornwinder, and Schempp); D. Reidel Publishing Company, (1984).

### UN ALGORITMO PARA DESCRIBIR PUNTOS EN CONJUNTOS SEMIALGEBRAICOS

Dado un sistema de ecuaciones e inecuaciones polinomiales  $f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0, g_1(x) \geq 0, \dots, g_p(x) \geq 0$ , con  $f_i, g_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p$ , una de las preguntas básicas que pueden plantearse es si este sistema tiene o no una solución en  $\mathbb{R}^n$ . En caso de que el conjunto de las soluciones sea no vacío, la siguiente pregunta natural es cómo exhibir, de alguna manera, (algunas de) estas soluciones.

Una de las subrutinas más utilizadas en los algoritmos que resuelven este problema consiste en hallar un conjunto finito que contenga al menos un punto en cada componente conexa del conjunto de las soluciones. En el caso de sistemas de ecuaciones (sin desigualdades), la práctica más usual involucra localizar los puntos críticos sobre el conjunto en cuestión de una función polinomial (típicamente, una proyección o una distancia).

En esta charla exhibiremos un algoritmo para la resolución del problema planteado, que utiliza las *condiciones de Karush-Kuhn-Tucker* (que generalizan el teorema de los multiplicadores de Lagrange al admitir condiciones de desigualdades) para caracterizar puntos críticos. Bajo ciertas hipótesis, estas condiciones permiten reducir el problema a hallar las soluciones aisladas de un sistema de ecuaciones ampliado. Para resolver este nuevo sistema desarrollamos un método específico, basado en técnicas de deformación, que explota fuertemente su estructura. Como resultado obtenemos un nuevo algoritmo para resolver el problema original con complejidades que mejoran las de los algoritmos anteriores que lo resuelven.

VARIACIONES INFINITESIMALES DE ESTRUCTURAS DE HODGE ASOCIADAS A  
HIPERSUPERFICIES EN VARIEDADES TÓRICAS SUAVES

Una manera de generar variaciones de estructuras de Hodge es a través de la cohomología de una familia de variedades proyectivas polarizadas. Estas variaciones son llamadas *variaciones geométricas*. Un problema clásico en teoría de Hodge consiste en describir las variaciones geométricas dentro del conjunto total de las variaciones. Una versión infinitesimal de este problema consiste en describir el lugar que ocupan las variaciones infinitesimales de estructura de Hodge que se originan en deformaciones infinitesimales de una variedad polarizada dada.

E. Allaud demuestra en [A] que las variaciones infinitesimales asociadas a la deformación infinitesimal de hipersuperficies genéricas del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^n$  son no genéricas en el conjunto de las variaciones infinitesimales correspondientes. En esta comunicación discutiremos la validez de este tipo de resultado para el caso de hipersuperficies en variedades tóricas completas, simpliciales y proyectivas. En particular, si la variedad tórica es suave y su dimensión  $\geq 4$ , vale que la variación infinitesimal generada por la deformación infinitesimal de una hipersuperficie genérica es no genérica. Estos resultados aportan evidencia para la conjetura siguiente: *las variaciones infinitesimales de estructura de Hodge de origen geométrico no son genéricas.*

REFERENCIA

[A] Allaud, E.: *Nongenericity of variations of Hodge structure for hypersurfaces of high degree*, Duke Math. J. **129** (2005), no. 2, 201–217.

---

# ÁLGEBRA HOMOLÓGICA Y ÁLGEBRAS DE HOPF

**Autores: Gastón Andrés García**

**Lugar: Universidad Nacional de Córdoba**

---

## FAMILIAS INFINITAS DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Usando algunos resultados generales sobre sucesiones exactas de álgebras de Hopf, se construirá una familia infinita de álgebras de Hopf de dimensión finita, que son no semisimples, no punteadas y cuyos duales tampoco son punteados. Dichas álgebras de Hopf resultan ser el cociente finito del álgebra de funciones cuantizada  $\mathcal{O}_q(G)$  en una raíz de la unidad  $q$ , sobre un grupo de Lie  $G$  conexo, simplemente conexo y semisimple sobre  $\mathbb{C}$ .

---

**Autores: César Galindo, Sonia Natale**

**Lugar: Fa.M.A.F. UNC-CIEM Conicet**

---

## ÁLGEBRAS DE HOPF SIMPLES Y DEFORMACIONES POR TWISTING

Muchos de los ejemplos conocidos de álgebras de Hopf semisimples provienen de las álgebras de grupo y sus duales mediante combinaciones de los siguientes dos métodos: uno es el de deformación por twisting y el otro es por medio de extensiones. En este sentido las álgebras de Hopf simples son los bloques elementales, pues toda álgebra de Hopf de dimensión finita puede construirse por extensiones sucesivas a partir de álgebras de Hopf simples.

Si  $G$  es un grupo finito simple, toda deformación por twisting de su álgebra de grupo es un álgebra de Hopf simple que es semisimple como álgebra [Nikshych,  *$K_0$ -Rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Alg. **26** (1998), 321–342]. El ejemplo más pequeño de un álgebra de Hopf simple es una deformación por twisting del grupo simple  $A_5$  de orden 60.

Mostraremos ejemplos de álgebras de Hopf simples, las cuales son deformaciones del grupo simétrico  $S_n$ ,  $n \geq 5$ . Mostraremos también un álgebra de Hopf simple construida a partir de una deformación de un grupo supersoluble de orden 60. Finalmente, se mostrará que toda deformación por twisting de un grupo nilpotente no es simple, más aún puede construirse por extensiones a partir de álgebras de grupo.

En particular, se deduce que la simplicidad de un álgebra de Hopf semisimple no está determinada por su categoría tensorial de representaciones.

---

SOBRE LOS ESTABILIZADORES DE YAN-ZHU

En el estudio de un grupo finito  $G$  actuando sobre un conjunto  $X$ , el estabilizador  $G_x$  de un punto  $x \in X$  cumple un papel importante.

Los *estabilizadores de Yan-Zhu* fueron introducidos en [YZ] con el objetivo de estudiar acciones de álgebras de Hopf generalizando las acciones de grupos finitos. Si  $H$  es un álgebra de Hopf,  $K$  es un  $H$ -comódulo álgebra y  $V$  un  $K$ -módulo el estabilizador de Yan-Zhu se denota por  $\text{Stab}_K(V)$ . Aquí el comódulo álgebra reemplaza al conjunto  $X$  y el  $K$ -módulo  $V$  juega el rol del punto  $x$ .

En esta charla mostraremos cómo se calcula el estabilizador de Yan-Zhu cuando  $K$  es una extensión Hopf-Galois. También mostraremos que si  $K$  no posee ideales biláteros  $H$ -coestables entonces

$$\dim K \dim \text{Stab}_K(V) = (\dim V)^2 \dim H.$$

Esta fórmula fue probada por Zhu asumiendo que  $H$  es semisimple. Para la prueba de esta fórmula usamos resultados importantes sobre la proyectividad de comódulo álgebras obtenidos por Skryabin.

También se mostrará cómo el estabilizador de Yan-Zhu es una herramienta fundamental en el estudio de los módulos sobre la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf. Obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 0.1.** *Si  $\mathcal{M}$  es una categoría módulo indescomponible sobre  $\text{Rep}(H)$  entonces  $\mathcal{M} \simeq_{\text{Stab}_K(V)} \mathcal{M}$  para algún  $H$ -módulo álgebra  $K$   $H$ -simple.*

REFERENCIAS

- [AM] N. ANDRUSKIEWITSCH and J.M. MOMBELLI, *Module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, en preparación.
- [YZ] M. YAN and Y. ZHU, *Stabilizer for Hopf algebra actions*, *Comm. Alg.* 26 **12**, 3885–3898 (1998).
- [Z] Y. ZHU, *The dimension of irreducible modules for transitive module algebras*, *Comm. Alg.* 29 **7**, 2877–2886 (2001).

SOBRE ÁLGEBRAS DE HOPF PUNTEADAS ASOCIADAS A CLASES DE CONJUGACIÓN PURAS EN  $\mathbb{S}_n$

Sea  $G$  un grupo finito no abeliano. Este trabajo es una contribución a la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita  $H$  cuyo grupo de *elementos tipo grupo*  $G(H)$  es isomorfo a  $G$ , en el contexto del *Método del Levante* (Andruskiewitsch - Schneider). Para ello, es necesario determinar todos los módulos de Yetter-Drinfeld  $V$  sobre el álgebra de grupo de  $G$  tales que el álgebra de Nichols  $\mathfrak{B}(V)$  es de dimensión finita. Los módulos irreducibles de Yetter-Drinfeld sobre  $\mathbb{C}G$  están parametrizados (salvo isomorfismos) por pares  $(\mathcal{C}, \rho)$ , donde  $\mathcal{C}$  es una clase de conjugación de  $G$  y  $\rho$  es una representación irreducible del centralizador  $G^s$  de un elemento  $s$  en  $\mathcal{C}$  fijo. Diremos que  $M(\mathcal{C}, \rho)$  es el módulo de Yetter-Drinfeld correspondiente a  $(\mathcal{C}, \rho)$  y  $\mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho)$  su álgebra de Nichols. Aquí consideramos  $G = \mathbb{S}_n$ , el grupo simétrico en  $n$  letras, y  $s$  en  $\mathbb{S}_n$  *puro*, i.e.  $s$  es un producto de ciclos disjuntos de la misma longitud. Diremos que la trenza es *negativa* si  $\mathfrak{B}(U) = \bigwedge(U)$ , el álgebra exterior de  $U$ , para todo subespacio trenzado de tipo diagonal  $U$  de  $M(\mathcal{C}, \rho)$ .

**Teorema.** *Sea  $\pi \in \mathbb{S}_{kn}$  puro de tipo  $(k^n)$ .*

- (A) *Si  $k$  es impar, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*
- (B) *Sea  $k = 2$ . (i) Si  $n$  es par, entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ . (ii) Supongamos  $n$  impar. Si  $\rho = \chi_{(n)} \otimes \epsilon$  ó  $\chi_{(n)} \otimes \text{sgn}$ , entonces la trenza es negativa. En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*
- (C) *Asumamos  $k = 2r$ ,  $r > 1$ . (i) Sea  $n = 1$ . Si  $\omega = -1$  entonces la trenza es negativa, y si  $\omega \neq -1$  entonces  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \chi_\omega) = \infty$ . (ii) Sea  $n > 1$ . Si  $r$  impar y  $\rho = \chi_{r, \dots, r} \otimes \text{sgn}^\delta$ ,  $\delta = 0$  ó  $1$ , ó si  $r$  par y  $\rho = \chi_{c, \dots, c} \otimes \text{sgn}^\delta$ ,  $\delta = 0$  ó  $1$ , y  $c = r$ ,  $\frac{r}{2}$  ó  $\frac{3r}{2}$ , entonces la trenza es negativa. En caso contrario,  $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{C}, \rho) = \infty$ .*

**Autores: Claudia Chao, Edson Ribeiro Alvares y Sonia Trepode**  
**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

#### COMPONENTES DEL CARCAJ DE AUSLANDER-REITEN CON DESVÍOS SECCIONALES.

Consideramos  $A$  un álgebra de artin y estudiamos la existencia de un desvío de una flecha en las componentes del carcaj de Auslander-Reiten. Decimos que existe un desvío de una flecha de  $i$  a  $j$ , si existe un camino paralelo a la flecha  $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow j$  de longitud mayor que uno, con  $i \neq i_{n-1}$  y  $i_1 \neq j$ .

La noción de desvío de una flecha, ya había sido considerada por Crawley-Boevey, Happel y Ringel en 1987. Ellos probaron que si existe un desvío de una flecha en una componente que no posee ciclos orientados entonces el desvío es seccional.

Dado un morfismo irreducible entre módulos indescomponibles, es conocido que su núcleo es un módulo indescomponible. Si la dimensión del espacio de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles dados es 1, es natural preguntarse si los núcleos de estos morfismos son isomorfos. La existencia de los mencionados desvíos seccionales hace que no necesariamente lo sean.

Estamos interesados en saber en que componentes del carcaj de Auslander-Reiten se encuentran estos desvíos. El resultado principal que obtuvimos es el siguiente: Si una componente del carcaj de Auslander-Reiten contiene un desvío seccional de una flecha entonces dicho desvío se encuentra sobre una sección de una componente conexa infinita de la parte estable a izquierda o estable a derecha de la componente dada.

Aplicamos los resultados obtenidos a álgebras inclinadas, shod, débilmente shod y lauras.

---

**Autores: Funes Olga**  
**Lugar: Universidad Nac. de la Patagonia San Juan Bosco**

---

#### DESCRIPCIÓN DE LAS ÁLGEBRAS HEREDITARIAS TORCIDAS POR LA ACCIÓN DE UN GRUPO DE TIPO DE REPRESENTACIÓN FINITO Y MANSO

In this work we assume that  $\Lambda$  is a finite-dimensional algebra over an algebraically closed field  $k$ . Let  $G$  a finite group acting on  $\Lambda$ . The skew group algebra  $\Lambda[G]$  is the free left  $\Lambda$ -module with basis all the elements in  $G$  and multiplication given by  $(\lambda g)(\mu h) = \lambda g(\mu)gh$  for all  $\lambda, \mu$  in  $\Lambda$ ,  $g, h$  in  $G$ . We study the skew group algebra  $\Lambda[G]$  when  $G$  is a finite group acting on  $\Lambda$  whose order is invertible in  $\Lambda$ .

The aim of this paper is to describe all possible actions of a finite abelian group on an hereditary algebra of finite or tame representation type and to give a description of the skew group algebra for each action. Gabriel has shown that a connected hereditary algebra is of finite representation type if and only if the underlying graph of its quiver is one of the Dynkin diagrams  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$  or  $E_8$ ; some years later it was shown that a connected hereditary algebra is of tame representation type if and only if the underlying graph of its quiver is one of the euclidean diagrams  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  or  $\tilde{E}_8$ . Then, in order to classify the finite and tame representation type hereditary skew group algebras, it suffices to study the group actions on the Dynkin and the euclidean quivers. In order to do this description, we start by considering a short exact sequence of groups  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow T \rightarrow 1$ . We can express  $\Lambda[G]$  in terms of the skew group algebra  $\Lambda[H][T]$  or the crossed product algebra  $\Lambda[H] *_\gamma T$ . In this context, we describe when  $\Lambda[G]$  is isomorphic to  $\Lambda[H][T]$ , for  $G$  a finite group whose order is invertible in  $\Lambda$ . In each one of the cases when the associated quiver is  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  or  $\tilde{E}_8$ , we get a connection between  $\Lambda[G]$  and the crossed product algebra  $\Lambda[H] * G/H$  with a complete description of all the possible groups  $G/H$  appearing in each case, where  $H$  is the subgroup of  $G$  consisting on all the elements acting trivially on a complete set of primitive orthogonal idempotents of the algebra  $\Lambda$ . As a consequence of all these results, we get that if  $H$  acts trivially on  $\Lambda$  then the crossed product algebras obtained in each description are skew group algebras.

---

**Autores: María Inés Peña - Sonia Trepode**  
**Lugar: Mar del Plata**

---

#### ÁLGEBRAS DE DIMENSIÓN HOMOLÓGICA PEQUEÑA

Consideramos álgebras de artin y sus categorías de módulos a izquierda finitamente generados. La parte de la izquierda de la categoría de módulos es la subcategoría plena cuyos objetos son los módulos indescomponibles con dimensión proyectiva menor o igual que uno, tal que todo predecesor también tiene dimensión proyectiva menor o igual que uno. Dualmente se define la parte de la derecha.

Las álgebras de dimensión homológica pequeña (shod), son las álgebras de artin de dimensión global menor o igual que tres cuyos módulos indescomponibles tienen dimensión proyectiva o dimensión inyectiva menor o igual que uno. En esta charla daremos una caracterización de las álgebras de dimensión homológica pequeña a través de propiedades de los Ext-inyectivos de la parte de la izquierda y los Ext-proyectivos de la parte de la derecha de dichas álgebras.

---

**Autores: Isabel Pratti, Elsa Fernandez, Sonia Trepode**  
**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

#### ÁLGEBRAS INCLINADAS DE CONGLOMERADO

Las categorías de conglomerado (clusters) asociadas a un álgebra hereditaria de dimensión finita sobre un cuerpo fueron introducidas Buan, Marsh, Reineke, Reiten y Todorov como una forma de interpretar los elementos esenciales que llevan a la definición de un álgebra de conglomerado, desarrollando para ello en estas categorías una teoría de la inclinación. El álgebra de endomorfismos de un objeto inclinante en la categoría de conglomerado es una  $k$ -álgebra de dimensión finita, denominada inclinada de conglomerado. Existe una estrecha relación entre las álgebras inclinadas y las álgebras inclinadas de conglomerado. Assem, Brustle y Schiffler demostraron que el álgebra inclinada de conglomerado es una extensión por relaciones del álgebra inclinada, esto es, un caso especial de extensión excindida. En esta charla consideraremos un álgebra  $A$  inclinada de conglomerado de tipo de representación finita, o minimal de tipo de representación infinita. Probamos el siguiente resultado, si consideramos el ideal  $W$  de  $A$  que consiste en cortar exactamente una flecha de cada ciclo de  $A$ , obtenemos un álgebra  $B = A/W$ , tal que  $A$  es una extensión excindida de  $B$ . Damos condiciones necesarias y suficientes sobre  $W$  para que  $A$  sea una extensión por relaciones de  $B$ .

---

# ANÁLISIS FUNCIONAL Y COMPLEJO

**Autores: González, Víctor - Rodríguez, Mabel**

**Lugar: U. N. Gral. Sarmiento - Instituto del Desarrollo Humano. Bs. As.**

## UNA DESCRIPCIÓN DE LA DEFICIENCIA CONVEXA DE UN COMPACTO EN TÉRMINOS DE ELEMENTOS DE VISIBILIDAD AFÍN

Este trabajo corresponde al área de Convexidad Generalizada y Visibilidad. El propósito de esta comunicación es presentar algunos resultados geométricos sobre la *deficiencia convexa* de conjuntos compactos en  $R^n$ . Esta noción ha sido estudiada para diversos fines, resaltamos un estudio geométrico asociado a la noción de puntos skeletales y skeletons para describir cómo se expande un fuego por una pradera homogénea y seca que tiene una región húmeda en cuya frontera se inicia el fuego. Recientemente se ha caracterizado en términos de la deficiencia convexa, el mirador de un conjunto compacto. Este tipo de resultados es central dentro de la Visibilidad y sugiere estudiar la noción en términos de elementos de dicha teoría. El inicio de este estudio es lo que presentamos aquí.

Algunas definiciones y resultados: Sea  $K \subset R^n$  compacto no convexo, la deficiencia convexa de  $K$  es  $D(K) = \text{conv}K \setminus K$ ,  $K_0$  denota una componente conexa de  $D(K)$ ,  $\text{Inc}K$  es el conjunto de puntos de no convexidad local de  $K$

**R.1.** Si  $x \in \text{Inc}K$  entonces  $x \in \text{bd}D(K)$

**R.2.** Si  $\text{bd}K_0 \not\subset \text{bd}K$ , existe  $x_0 \in K_0$  tal que el cono de infinitud de  $S$  por  $x_0$  es no trivial ( $S$  es la componente conexa de  $K^C/S \supset K_0$ )

**R.3.** Si  $P$  es el conjunto de puntos extremales de  $\text{conv}K$ ,  $\text{bd}(\text{conv}K) \cap (\text{bd}K)^C \cap P = \emptyset$

**R.4.** Si  $\text{bd}K_0 \not\subset \text{bd}K$ ,  $\exists y, z \in \text{bd}(\text{conv}K) / [y, z] \subset \text{bd}(\text{conv}K)$

**R.5.** Si  $K_0$  es única,  $H$  hiperplano de apoyo de  $\text{conv}(clK_0)$  por  $p \in \text{bd}(\text{conv}(clK_0)) \cap \text{bd}K \cap (\text{bd} \text{conv}K)^C$ ,  $H^+$  semi-espacio cerrado determinado por  $H / H^+ \ni K_0$  y  $p \notin \text{Inc}K$ , la estrella de  $p$  en  $K$  se describe completamente por  $H^+ \cap K$ .

**Autores: Formica, Alberto; Rodríguez, Mabel**

**Lugar: U. N. Gral. Sarmiento - Instituto del Desarrollo Humano, Bs. As.**

## ELEMENTOS DE ILUMINACIÓN Y VISIBILIDAD A TRAVÉS DE OPERADORES

Esta comunicación se enmarca en el área de Convexidad Generalizada. A partir de la noción de Iluminación que utilizan Boltyanski y Martini para convexos, definimos un “operador de iluminación”, que notaremos  $il_K$ , sobre conjuntos  $A \subset K^c$ , ( $K \subset R^n$ ). Con este operador, determinamos condiciones sobre la iluminación de  $\text{Fr}(K)$ , donde  $K$  no necesariamente es convexo. Si  $K$  es un cuerpo convexo compacto, a partir del operador  $il_K$  se obtiene una condición necesaria para la iluminación de  $K$ . Se estudia también la relación entre el operador  $il_K$  y el operador  $\sigma_K$  definido por Martini y Wenzel, y a partir de este último, se obtiene una caracterización de conjuntos convexos en  $R^n$ . Esta comunicación continúa la que en la reunión anual 2004 de la UMA presentaron J. C. Bressan y A. Formica desde el punto de vista axiomático. Algunas definiciones y proposiciones son las siguientes:

**D.1.** Dado  $K \subset R^n$ ,  $il_K : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(\text{cl}(E))$  se define por

$il_K(A) = \{y \in \text{Fr}(K) : \exists a \in A, [a, y] \cap K = \emptyset \wedge [a, y] \cap \text{int}(K) \neq \emptyset\}$ .

En lo que sigue,  $K$  es un subconjunto **cerrado** de  $R^n$ ,  $\text{int}(K) \neq \emptyset$  y  $x \in E = K^c$ .

**P.1.** Si  $K$  es compacto entonces se verifica: i) Si  $K = \text{cl}(\text{int}(K))$ ,  $y \in \text{Fr}(K)$ , y  $(x, y) \subset \text{int}\sigma_K(A)$  entonces  $y \in il_K(A)$ . ii)  $il_K$  es monótono

**P.2.**  $il_K(x) \subset il_K(\sigma_K(x))$ , y si  $K$  convexo entonces  $il_K(\sigma_K(x)) \subset il_K(x)$

**P.4.**  $K$  convexo  $A, B \subset E$ . Si  $\sigma_K(A) \subseteq \sigma_K(B)$  entonces  $il_K(A) \subseteq il_K(B)$ .

**P.5.** Si  $A \subset R^n$  y  $K$  cuerpo convexo compacto tal que  $il_K(A) = \text{Fr}(K)$  entonces  $\text{aff}(A) = R^n$

**P.6.** Sea  $K \subset R^n$  compacto e  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ . Se verifica que  $K$  es convexo si y sólo si, para todo  $x \in K^c$  se verifica que  $\sigma_K(x) \cap \text{conv}(K) \neq \emptyset$ .



OPERADORES LUC SOBRE UN ÁLGEBRA DE BANACH CON UNA DENSIDAD  
HIPERBÓLICA

Se considera el álgebra de funciones absolutamente integrables sobre el semieje positivo respecto de una densidad hiperbólica. Esta álgebra reviste interés por dos razones. Por un lado, la versión discreta de la misma produce el marco natural en el que se estudian las representaciones irreducibles del grupo de Lie  $SU(2)$  (v. [1]). Por otra parte, se trata de un álgebra de Banach no-abeliana de no-convolución no-unitaria. En principio evaluamos el espacio ideal maximal y la acción explícita de la transformada de Gelfand. Observamos luego que el álgebra en cuestión no satisface la propiedad de Radón-Nikodým. Por ello, cabe la posibilidad de existencia de operadores lineales acotados no representables. Sin embargo, se prueba que la clase de operadores acotados localmente absolutamente continuos lo es, y determinamos los núcleos correspondientes. Este tipo de teoremas de representación son de interés si se trata de determinar teoremas de existencia y de estructura de derivaciones en el álgebra de operadores (cf. [2], [3]).

### Referencias

- [1] Dieudonné, J.: *Treatise on Analysis*. Volume V, Acad. Press, N. Y., (1977).
- [2] A. Barrenechea & C. C. Peña: *On innerness of derivations on  $S(H)$* . Lobachevskii J. of Math., Vol. 18, 21-32, (2005).
- [3] A. Barrenechea & C. C. Peña: *Some remarks about bounded derivations on the Hilbert algebra of square summable matrices*. Matematicki Vesnik, **57**, No. 4, 78-95, (2005).

COMPLEMENTOS DE SCHUR EN ESPACIOS DE KREIN

Dado un operador (acotado) semidefinido positivo  $A$  sobre un espacio de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , Anderson y Trapp definen el complemento de Schur  $A_{/\mathcal{S}}$  como

$$A_{/\mathcal{S}} = \max_{\leq} \{X \in L(\mathcal{H}) : 0 \leq X \leq A, R(A) \subseteq \mathcal{S}^\perp\},$$

donde  $\leq$  representa el orden usual entre operadores autoadjuntos. Por su parte, Pekarev probó que  $A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2}P_{\mathcal{M}^\perp}A^{1/2}$ , siendo  $P_{\mathcal{M}^\perp}$  la proyección ortogonal al subespacio  $\mathcal{M}^\perp = A^{-1/2}(\mathcal{S}^\perp)$ .

Sea  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$  el espacio de Krein cuya métrica indefinida está dada por

$$[x, y] = \langle Jx, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

con  $J = J^* = J^{-1} \in L(\mathcal{H})$  ( $L(\mathcal{H})$  el álgebra de operadores acotados sobre  $\mathcal{H}$ ). Dado  $T \in L(\mathcal{H})$  y  $\mathcal{W}$  un subespacio de  $\mathcal{H}$ , notaremos  $T^\#$  al operador  $J$ -adjunto de  $T$  y  $\mathcal{W}^{[\perp]}$  al complemento  $J$ -ortogonal de  $\mathcal{W}$ .

Todo operador  $J$ -autoadjunto  $A \in L(\mathcal{H})$  puede factorizarse como  $A = DD^\#$ , siendo  $D \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  inyectivo (y  $\mathcal{K}$  espacio de Krein). Sin embargo, este tipo de factorización no es única. Es decir, existen operadores  $J$ -autoadjuntos que admiten dos o más factorizaciones donde los factores son no isomorfos.

Si  $\mathcal{S}$  es un subespacio de Krein de  $\mathcal{H}$  y  $A = DD^\# \in L(\mathcal{H})$  cumple la Propiedad de Factorización Única, definimos el complemento de Schur  $A_{/[\mathcal{S}]}$  como

$$A_{/[\mathcal{S}]} = DP_{\mathcal{M}^{[\perp]}/\mathcal{M}}D^\#,$$

siendo  $P_{\mathcal{M}^{[\perp]}/\mathcal{M}}$  la proyección  $J$ -ortogonal sobre  $\mathcal{M}^{[\perp]} = D^{-1}(\mathcal{S}^{[\perp]})$ .

El objetivo de este trabajo es caracterizar a  $A_{/[\mathcal{S}]}$  y comparar sus propiedades (especialmente en el caso en que  $\mathcal{S}$  es definido) con las del complemento de Schur de un operador semidefinido positivo en un espacio de Hilbert.

---

#### GEODÉSICAS EN LA ESFERA DE UN MÓDULO $C^*$

Dada una  $C^*$ -álgebra unital  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{X}$  un módulo  $C^*$  a derecha sobre  $\mathcal{A}$ , consideramos el problema de encontrar curvas suaves cortas en la esfera  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} : \langle x, x \rangle = 1\}$ . Las curvas en  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  se miden considerando la métrica de Finsler que consiste en tomar la norma de  $\mathcal{X}$  en cada espacio tangente de  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ . Hemos solucionado el problema de valores iniciales para el caso en que  $\mathcal{A}$  sea un álgebra de von Neumann y  $\mathcal{X}$  autodual. En concreto: para cada elemento  $x_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  y cualquier vector  $v$  tangente en  $x_0$ , existe una curva  $\gamma(t) = e^{tZ}(x_0)$ ,  $Z \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X})$ ,  $Z^* = -Z$  y  $\|Z\| \leq \pi$ , tal que  $\gamma(0) = x_0$  y  $\dot{\gamma}(0) = v$ , que es minimizante a lo largo de su recorrido para  $t \in [0, 1]$ . La existencia de tal  $Z$  está relacionada con el problema de extensión de operadores autoadjuntos. Tales curvas minimales no necesariamente son únicas. También consideramos el problema de contorno: dado  $x_0, x_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ , encontrar una curva de longitud mínima que los una. En este caso hemos obtenido varias respuestas parciales. Por ejemplo, si llamamos  $f_0$  a la proyección autoadjunta  $I - x_0 \otimes x_0$ , y se tiene la hipótesis de que el álgebra  $f_0 \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) f_0$  es finito dimensional, entonces existe una curva  $\gamma$  que une  $x_0$  y  $x_1$ , que es minimizante a lo largo de su recorrido.

---

#### COMPLETACIONES A MARCOS AJUSTADOS

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión finita y  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión decreciente de números positivos. Dado un conjunto de vectores  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^p$  en  $\mathcal{H}$ , encontramos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y una sucesión de Bessel  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^r$  en  $\mathcal{H}$  tales que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  es un marco ajustado en  $\mathcal{H}$ , con  $\|g_i\|^2 = a_i$  para  $1 \leq i \leq r$  que llamamos una “ $\mathbf{a}$  - completación” de  $\mathcal{F}$ . Estas condiciones dependen de resultados de [1].

Además, calculamos explícitamente el mínimo  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  con esta propiedad. Esto resuelve completamente un problema enunciado en [3]. Por otra parte, usando resultados de [2], mostramos un algoritmo computable que permite hallar una completación (aunque no con el número óptimo de elementos) de  $\mathcal{F}$ .

#### Referencias

- [1] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz and D. Stojanoff, *The Schur-Horn Theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator*, Illinois Journal of Mathematics, to appear.
  - [2] I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr., M.A. Sustik, J.A. Tropp, *Generalized finite algorithms for constructing Hermitian matrices with prescribed diagonal and spectrum*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2005), 1, 61-71
  - [3] D. J. Feng, L. Wang and Y. Wang *Generation of finite tight frames by Householder transformations*, Advances in Computational Mathematics, (2006) 24: 297-309.
-

COMPONENTES DE OPERADORES AUTOADJUNTOS

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert,  $L(\mathcal{H})$  el álgebra de operadores lineales acotados en  $\mathcal{H}$ ,  $L(\mathcal{H})^s$  el subconjunto de operadores autoadjuntos y  $GL(\mathcal{H})$  el grupo de operadores inversibles de  $L(\mathcal{H})$ . El grupo  $GL(\mathcal{H})$  actúa sobre  $L(\mathcal{H})^s$  de modo que el conjunto de operadores inversibles autoadjuntos,  $GL(\mathcal{H})^s$ , es un espacio homogéneo de  $GL(\mathcal{H})$ . Dado  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , la órbita de  $a$  correspondiente a esta acción es el conjunto  $\mathcal{O}_a = \{gag^* : g \in GL(\mathcal{H})\}$ . Se caracterizó este conjunto en el caso inversible: si  $a \in GL(\mathcal{H})^s$  resulta que dado  $b \in GL(\mathcal{H})^s$ ,  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si su parte unitaria está en la órbita unitaria de  $u_a$ , donde  $u_a$  la parte unitaria en la descomposición polar de  $a$ .

Paralelamente definimos en  $L(\mathcal{H})^s$  tres relaciones de equivalencia que extienden una relación que ya ha sido estudiada en el cono de operadores positivos. Resulta que las clases de equivalencia o *componentes* de  $a \in L(\mathcal{H})^s$ ,  $C_a, C_a^1, C_a^2$  de las tres relaciones verifican que  $C_a \subseteq C_a^1 \subseteq C_a^2$ . Es inmediato ver que si  $\mathcal{P}$  es el conjunto de las reflexiones y  $u \in \mathcal{P}$  se tiene que  $\pi^{-1}(\{u\}) = C_u$ ,  $\mathcal{O}_u = C_u^1$  y  $GL(\mathcal{H})^s = C_u^2$  donde  $\pi : GL(\mathcal{H})^s \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\pi(a) = u_a$ . Más generalmente, se probó que si  $a$  es un operador autoadjunto de rango cerrado entonces  $C_a = \pi^{-1}(\{v_a\})$ ,  $C_a^1$  es la órbita de  $a|_{R(a)}$  dada por la acción del grupo de operadores inversibles del  $R(a)$  y  $C_a^2 = GL(R(a))^s$ , donde  $v_a$  es la isometría parcial de la descomposición polar de  $a$ .

---

SUCESIONES COHERENTES DE IDEALES DE POLINOMIOS SOBRE ESPACIOS DE BANACH

Los ideales de polinomios sobre espacios de Banach más usados se pueden considerar como el análogo  $n$ -homogéneo a un ideal de operadores. Este es el caso, entre otros, de los ideales de polinomios nucleares, integrales, múltiple  $r$ -sumantes,  $r$ -dominados, etc. Sin embargo, la extensión de un ideal de operadores lineales a grados más altos no es siempre obvia. Por ejemplo, existen varias extensiones del ideal de los operadores de absolutamente  $r$ -sumantes.

Uno de los objetivos de este trabajo es clarificar la relación entre un ideal  $\mathfrak{A}$  de operadores y un ideal de polinomios definido como extensión de  $\mathfrak{A}$ . Para ello introducimos el concepto de *compatibilidad* entre un ideal de polinomios  $n$ -homogéneos y un ideal de operadores. La extensión del ideal de operadores  $\mathfrak{A}$  a distintos grados da lugar a una sucesión  $\{\mathfrak{A}_k\}_k$ , donde cada  $\mathfrak{A}_k$  un ideal de polinomios  $k$ -homogéneos. Entonces, es interesante estudiar no sólo la compatibilidad de cada ideal de polinomios  $\mathfrak{A}_k$  con  $\mathfrak{A}$ , si no también la relación entre diversos  $\mathfrak{A}_k$ . Con este fin, definimos el concepto de *coherencia* de una sucesión de ideales de polinomios. Aplicamos estos conceptos a distintos ideales de polinomios conocidos. Mostramos que no todas las extensiones usuales del ideal de operadores absolutamente  $r$ -sumantes son compatibles con él. Describimos el mayor y menor ideal de polinomios compatibles con un ideal de operadores dado, lo que nos permite caracterizar la familia de todos los ideales de polinomios compatibles con éste. Por otra parte, mostramos que dado un ideal de polinomios, no puede haber más de un ideal de operadores compatible con él.

---

**Autores: Marta García - Manuel Aguirre**

**Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As.**

---

#### ALGUNOS PRODUCTOS DE DISTRIBUCIONES USANDO LAS SERIES DE LAURENT

Sabemos que en [[1], pag.89] aparece un método para evaluar producto de distribuciones usando la Serie de Laurent.

Usando éste método, en este trabajo se obtiene un desarrollo en Serie de la Delta de Dirac soportada en  $(1 - x^2)$ , y productos del tipo :

1.-  $(1 \pm x)^{-k} \delta^{(s)}(1 \pm x)$

2.-  $(1 - x^2)^{-k} \delta^{(s)}(1 - x^2)$

donde  $k = 1, 2, \dots$  y  $s = 1, 2, 3, \dots$

#### References

- [1] Aguirre Manuel and Chenkuan Li -" The distributional products by the Laurent Series" to appear in Math Nachr (Germany).
- 

**Autores: Federico Martinez; Pedro Catuogno; Sandra Molina**

**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

#### EXPANSIONES DE LAGUERRE Y PRODUCTO DE DISTRIBUCIONES

En [1] ha sido desarrollado un método para multiplicar distribuciones temperadas basado en los teoremas de representación de distribuciones temperadas en series de Hermite. Como continuación de ese trabajo, hemos estudiado un producto de distribuciones temperadas con soporte positivo, considerando las aproximaciones dadas por las expansiones en series de Fourier-Laguerre. Se han estudiado propiedades de dicho producto y calculado algunos ejemplos.

#### Bibliografía

- [1] P.Catuogno, S.Molina y C.Olivera, *On Hermite Representations of Distributions and Products*, (aparecerá en Integral Transform and Special Functions).
- [2] A.J.Duran, *Laguerre Expansions of Tempered Distributions and Generalized Functions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 150 (1990), 166-180.
- [3] M.Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*. Pitman Research Notes in Math. Series 259. Ed Longman Science and Technology, 1993.
-

# ANÁLISIS NUMÉRICO

**Autores:** Arouxét, María Belén; Echebest, Nelida; Pilotta, Elvio  
**Lugar:** UNLP; UNLP; FAMAF

---

## CONVERGENCIA GLOBAL DEL MÉTODO WEDGE USANDO MODELOS CUADRÁTICOS

Este trabajo extiende los resultados de convergencia global del método Wedge de Marazzi y Nocedal [1, 2] cuando se emplea un modelo de interpolación cuadrático. El método Wedge fue diseñado para resolver problemas de funciones suaves, con una cantidad moderada de variables, cuando no se dispone del cálculo de las derivadas. Este genera un modelo que interpola los valores de la función objetivo usando un conjunto de puntos muestrales, y usa regiones de confianza para conseguir la convergencia. El subproblema generado en cada iteración asegura que todos los puntos utilizados satisfacen cierta condición geométrica necesaria y, luego, son adecuados para generar el próximo modelo con iguales características. Los autores citados presentan dos versiones del método, una usando modelos lineales y otra con modelos cuadráticos, mostrando también la convergencia global para el caso del interpolante lineal.

Se presentarán además resultados numéricos del método analizado comparándolo con otros métodos conocidos de esta área temática.

## Referencias

- [1] M. Marazzi. Nonlinear optimization with and without derivatives. PhD thesis, 2001.
  - [2] M. Marazzi y J. Nocedal. Wedge trust region methods for derivative free optimization, *Mathematical programming*, Vol. 91 (2): pp 289-305, 2002.
- 

**Autores:** Hector E. Odstrcil  
**Lugar:** Centro de Investigaciones Básicas y Aplicadas - U. N. de Jujuy -  
Facultad de Ingeniería

---

## MODELIZACIÓN DIFERENCIAL

El presente trabajo consiste en el desarrollo de un algoritmo que sea capaz de ajustar, un sistema de ecuaciones en diferenciales de primer orden (lineales o no), a fenómenos que fueron muestreados en forma discreta, y en particular se probó que el método desarrollado de ajuste local para el modelo de Lorenz.

Este es un algoritmo matemático que realiza estimaciones sobre parámetros del sistema de ecuaciones en cada n-upla muestreada, almacenándolos en un conjunto de matrices, de modo que dicho algoritmo escogerá del conjunto la matriz de parámetros óptima para el intervalo donde se analizó el fenómeno, de manera tal que produzcan el mínimo error entre el modelo candidato y los datos experimentales. Con el método combinado aquí presentado se consigue un ajuste muy rápido. De esta forma el modelo candidato podrá describir en forma cualitativa y cuantitativa el comportamiento del fenómeno.

El algoritmo se implementó mediante un programa realizado en MATLAB, que recibe por un lado el sistema de ecuaciones en diferenciales de primer orden, como modelo candidato y la serie experimental del fenómeno.

Estos análisis y desarrollos, están enmarcados dentro de las tareas de un proyecto de investigación acerca de la optimización de algoritmos de cálculo numérico, formado por un grupo interdisciplinario, perteneciente al Centro de Investigaciones Básicas y Aplicadas dependiente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy.

---

**Autores: N. Echebest, M. T. Guardarucci, H. Scolnik**  
**Lugar: Depto. de Matematica. Facultad de Ciencias Exactas. UNLP.**

---

EXTENSIÓN DEL ESQUEMA DE PROYECCIONES OBLICUAS INCOMPLETAS AL CASO  
DE PROBLEMAS CON RANGO DEFICIENTE

El objetivo de este trabajo es extender la aplicabilidad de los esquemas algorítmicos introducidos por los autores en previas publicaciones [1] a la resolución de sistemas lineales inconsistentes con rango deficiente. Estos algoritmos emplean proyecciones incompletas sobre el conjunto solución del sistema aumentado  $Ax-r=b$ , y un esquema alternante de proyecciones que converge a una solución de cuadrados mínimos del problema. Con ese propósito se usan proyecciones oblicuas aproximadas, y en particular se introducen proyecciones oblicuas variables provenientes de la penalización del problema. Estas se definen por medio de matrices que penalizan la norma de los residuos, muy fuertemente en las primeras iteraciones y decreciendo su influencia a lo largo del procedimiento iterativo, con el objetivo de lograr convergencia más rápida. Las propiedades teóricas de los nuevos algoritmos se analizan y se presentan experiencias numéricas comparando su eficiencia con varios métodos de proyecciones muy conocidos y utilizados en la resolución de problemas de reconstrucción de imagen.

[1] *Incomplete Oblique Projections for Solving Large Inconsistent Linear Systems*, H. Scolnik, N. Echebest, M.T. Guardarucci, M. C. Vacchino, (to appear in *Mathematical Programming B*) (2005).

---

**Autores: Pedro Morin, Kunibert G. Siebert, Andreas Veese**  
**Lugar: IMAL-UNL (Santa Fe), Augsburg (Alemania), Milán (Italia)**

---

UN RESULTADO DE CONVERGENCIA BÁSICO PARA ELEMENTOS FINITOS ADAPTIVOS

Los métodos de elementos finitos se utilizan con éxito para calcular soluciones numéricas de ecuaciones en derivadas parciales. Son, hoy en día, herramientas estándar en ciencia e ingeniería. Sólo los métodos adaptivos permiten la simulación de problemas multi-escala, especialmente en tres dimensiones. Una iteración típica adaptiva es un ciclo de la forma

Resolver  $\longrightarrow$  Estimar  $\longrightarrow$  Marcar  $\longrightarrow$  Refinar.

El análisis de los métodos adaptivos debe proveer, en primer lugar, cotas calculables del error para el paso **Estimar**, que se denominan *estimadores del error a posteriori*. En segundo lugar, se debe estudiar si tal iteración realmente conduce a una mejora en la solución, es decir, debe demostrarse que la sucesión de soluciones discretas converge a la solución exacta.

Hasta el momento, los resultados de convergencia para métodos de elementos finitos adaptivos en dimensiones 2 y 3 se basan en procedimientos especiales de marcado y reglas de refinamiento específicas, que no son las más utilizadas en aplicaciones prácticas.

En esta charla mostraremos que *todos* los algoritmos adaptivos utilizados en la práctica convergen para una gran clase de problemas lineales, sin necesidad de ingredientes especiales.

---

ESTIMADORES A POSTERIORI DEL ERROR PARA UN PROBLEMA PARABÓLICO CON  
COEFICIENTES DISCONTINUOS.

En este trabajo consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

en el cual  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio Lipschitz, poligonal, acotado y particionado en subdominios Lipschitz poligonales abiertos;  $(0, T)$  es un intervalo de tiempo dado y el coeficiente  $k(x)$  una función positiva y constante sobre cada subdominio;  $f$  y  $u^0$  son funciones conocidas.

En este problema, el parámetro  $k(x)$  puede tener saltos de varios órdenes de magnitud, que ocasionan una pérdida de regularidad en la solución y crea dificultades para resolver numéricamente la ecuación.

Aproximamos la solución del problema (1) usando una discretización por Elementos Finitos en el espacio y Diferencias Finitas en el tiempo. Para realizar más eficientemente los cálculos, y dada la falta de regularidad de la solución, usamos adaptatividad para lo cual se necesitan estimadores a posteriori del error robustos.

En este trabajo proponemos estimadores a posteriori para los errores de discretización espacial y temporal que resultan en una cota superior global del error, independiente del tamaño de la malla, paso de tiempo o parámetros del problema, que sólo depende del ángulo mínimo de la triangulación.

Finalizamos presentando experimentos numéricos que muestran la eficiencia de los cálculos adaptativos.

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL MULTIVARIADA EN NODOS IMPLÍCITOS

Se estudia el problema de interpolación polinomial multivariada cuando el conjunto de nodos es una  $\mathbb{Q}$ -variedad algebraica afín 0-dimensional  $V$  de  $\mathbb{C}^n$ , que se supone dada en forma implícita por polinomios  $F_1, \dots, F_n$  en  $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ . A partir de estos polinomios se construye un subespacio  $\prod_V$  de  $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$  en donde la interpolación de polinomios arbitrarios de  $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$  es posible y única, con la propiedad que los grados de los polinomios en  $\prod_V$  están acotados por  $n(d-1)$ , siendo  $d$  una cota para los grados de los polinomios  $F_1, \dots, F_n$ . La demostración de la existencia de un tal subespacio  $\prod_V$  se basa en una fórmula de interpolación hallada por L.Kronecker, en el concepto de resolución geométrica de la variedad  $V$ , y en las propiedades de la traza del anillo de coordenadas de la variedad  $V$ . Se considera finalmente una versión algorítmica de este problema. Se prueba de hecho la existencia de un algoritmo que recibe como entrada un programa que evalúa los polinomios  $F_1, \dots, F_n$  y  $F$  y que devuelve como salida los siguientes ítems

- un programa que evalúa un sucesión de polinomios que forman una base de un subespacio de interpolantes  $\prod_V$  como arriba.
- las coordenadas en la base del ítem anterior del polinomio en  $\prod_V$  que interpola al polinomio de entrada  $F$ .

Si la talla del programa de entrada es a lo sumo  $L$  y la cardinalidad de  $V$  es  $\delta$ , entonces el algoritmo se ejecuta con  $\mathcal{O}(L\delta^2)$  operaciones aritméticas en  $\mathbb{Q}$ .

---

**Autores: Néstor E. Aguilera, Pedro Morin**

**Lugar: Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL) y Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral y CONICET, Santa Fe, Argentina**

---

### OPTIMIZACIÓN SOBRE FUNCIONES CONVEXAS

Muchos problemas de interés tanto teórico como práctico involucran encontrar el óptimo sobre una familia de funciones convexas. Por ejemplo, encontrar la proyección de una función en  $H^k(\Omega)$  sobre las convexas de ese espacio, o en economía, encontrar

$$\max_{u \in \mathcal{D}} \int_Q (\nabla u(x) \cdot x - u(x) - c|\nabla u|^2) f(x) dx, \quad (1)$$

donde  $Q = [0, 1]^d$ ,  $c$  es una constante no negativa,  $f$  es una función no negativa, y  $\mathcal{D}$  son las funciones convexas sobre  $Q$  que satisfacen restricciones adicionales sobre el gradiente.

En el caso continuo y suponiendo suavidad, las restricciones de convexidad pueden darse pidiendo que el Hessiano sea semi-definido positivo, pero al hacer aproximaciones discretas surgen dos problemas: las soluciones pueden no ser suaves (como es el caso en (1) si  $c = 0$ ), y las funciones con Hessiano discreto semi-definido positivo pueden no ser convexas en el sentido discreto.

Es así que algunos autores han trabajado con descripciones no locales que hacen que la cantidad de restricciones crezca en dos dimensiones como  $N^{1.8}$  siendo  $N$  el número de nodos de la malla, y siendo muy difícil de generalizar a más dimensiones.

En este trabajo proponemos una aproximación en diferencias finitas usando un Hessiano discreto apropiado, que nos permite demostrar convergencia bajo condiciones generales, aún cuando la solución continua no sea suave, trabajando en cualquier dimensión, con  $O(N)$  restricciones.

Usando códigos de programación Semi Definida Positiva (SDP), mostramos ejemplos concretos de aproximaciones a algunos de los problemas mencionados.

---



# ANÁLISIS REAL Y ARMÓNICO

**Autores: Serrano Eduardo**  
**Lugar: ECyT - UNSAM**

---

## ACERCA DE LA ESTIMACIÓN NUMÉRICA DE LA REGULARIDAD PUNTUAL DE FUNCIONES MEDIANTE WAVELETS

Las propiedades de una función en un punto  $x_0$  de su dominio puede expresarse en término de la pertenencia a ciertas clases funcionales cuya definición depende de uno o más parámetros numéricos, comunmente denominados *exponentes de regularidad* o *de oscilación*. El exponente puntual de Holder es el ejemplo más conocido. Los *espacios 2-microlocales* asociados a dos exponentes, pueden considerarse como una extensión y refinamiento de los espacios Holderianos.

La pertenencia de una función a tales clases puede caracterizarse por medio de la Transformada Wavelet, continua o discreta, bajo hipótesis bastante amplias sobre la wavelet madre.

En general, estos métodos de análisis se basan en el comportamiento de la transformada cuando la escala tiende hacia las altas frecuencias mientras que, localmente, se concentra entorno de  $x_0$ . Consecuentemente, se plantea la cuestión de la estimación numérica en el caso de que la función esté dada por su muestreo o se exprese por una secuencia de datos experimentales.

El empleo de wavelets para estas estimaciones requiere de la apropiada selección de la wavelet, de la transformada y de la técnica adecuada para el problema planteado. La eficiencia del método dependerá de la capacidad de lograr, a partir de finitos datos, la extrapolación de la transformada hacia las altas frecuencias y la consecuente interpolación entorno del punto  $x_0$ .

En esta presentación se discuten algunos aspectos de esta cuestión, principalmente en el caso de la estimación del exponente Holder puntual y al par de exponentes microlocales.

---

**Autores: Nicolás, Francisco**  
**Lugar: FCE-UNLP**

---

## UNA ESTIMACIÓN PARA EL POTENCIAL DE CAPA DOBLE

Se presentará una estimación en norma supremo para el potencial de capa doble asociado al Laplaciano en función de la geometría del dominio. El potencial de capa doble de una función  $f$  definida en el borde de un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se define como

$$u(X) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{(X-Q) \cdot N_Q}{|X-Q|^n} f(Q) d\sigma(Q), \quad X \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \quad (1)$$

donde  $N_Q$  denota el vector normal interior a  $\partial\Omega$  en  $Q$  y  $\omega_n$  es el área de la superficie de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .

Se demostrará que  $|u(X)| \leq c(X) \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\partial\Omega)}$ , donde

$$\begin{aligned} c(X) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S_n} \mathcal{H}^0(\partial\Omega \cap \mathcal{P}_X^{-1}\{\nu\}) d\mathcal{H}^{n-1}(\nu) \\ &\leq t(X) := \sup_{\nu \in S_n} \mathcal{H}^0(\partial\Omega \cap \mathcal{P}_X^{-1}\{\nu\}), \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathcal{P}_X(Y) = \frac{Y-X}{|Y-X|}$ , y  $\mathcal{H}^k$  es la medida de Hausdorff  $k$ -dimensional.

La función  $c(X)$  en general no es acotada en  $\Omega$ . Si lo es en dominios cuasi convexos (esto es,  $t(\Omega) := \|t\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} < \infty$ ), en cuyo caso se prueba de manera directa que  $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\partial\Omega)}$ .

$c(X)$  no es otra cosa que  $\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{(X-Q) \cdot N_Q}{|X-Q|^n} d\sigma(Q)$ , sin embargo la expresión (2) tiene dos potenciales ventajas: 1- Permite apreciar la relación que existe entre la forma del dominio  $\Omega$  y el comportamiento del potencial; 2- Hay una notable similitud con las fórmulas de área y co-área que podría explotarse.

---

**Autores: Toschi Marisa, Sanmartino Maria Marcela**  
**Lugar: Universidad Nac. de La Plata**

---

#### ESTIMACIONES A PRIORI CON PESOS

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  con borde  $\partial\Omega \in C^2$  y sea  $u$  solución del problema de Dirichlet en  $\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $f \in L^2(\Omega, w)$ ,  $w$  un peso tal que  $w \in A_2$ .  
Entonces

$$\|D_{x_i x_j} u\|_{L^2(\Omega, w)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega, w)}$$

Para probar estas estimaciones hemos utilizado la teoría general de integrales singulares y probado acotaciones para las derivadas de la función de Green en dominios apropiados.

#### Referencias:

- [1] G. Fabes, Comunicación Personal (1990).
- [2] S. J. Gardiner and A. Gustafsson, "Smooth Potentials With Prescribed Boundary Behaviour". Mathematics, (2000).
- [3] M. Grüter and K-O Widman, "The Green Function for Uniformly Elliptic Equations". Manuscripta Math 37 (1982), 303-342.
- [4] A. Dall'Acqua and G. Sweers, "Estimates for Green Function and Poisson kernels of higher order Dirichlet boundary value problem". J. Differential Equation 205 (2004), 466-487.
- [5] K-O Widman, "Inequalities for the Green Function and Boundary Continuity of the Gradient of Solutions of Elliptic Differential Equations". Math. Scand. 21 (1967), 17-37.

---

**Autores: José Luis Romero**

**Lugar: Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires**

---

#### PERTURBACIÓN DE CONJUNTOS DE MUESTREO EN ESPACIOS DE TIPO SPLINE IRREGULARES

El problema del muestreo es el de reconstruir una señal continua a partir de sus muestras en ciertos instantes de tiempo. Dada una familia de funciones, un conjunto de muestreo es un conjunto de puntos tal que la norma de las funciones de la familia es equivalente a la norma de sus muestras. El caso clásico, ampliamente estudiado, es el de las funciones de *banda limitada*, es decir, las funciones cuya transformada de Fourier está soportada en cierto intervalo.

Modernamente, se estudia el mismo problema en espacios de funciones más generales llamados de tipo spline. Los resultados de existencia del caso de banda limitada descansan en la analiticidad de las funciones y no se pueden trasladar directamente a escenarios más generales. Con todo, para configuraciones regulares de puntos (reticulados) se tienen algunos resultados de existencia.

En este trabajo exploramos la posibilidad de obtener resultados de muestreo irregular perturbando configuraciones regulares de puntos. Probamos que todo conjunto de muestreo en un espacio de tipo spline puede ser ligeramente perturbado sin perder sus propiedades y estimamos en ciertos casos cuánto es posible perturbarlos. Además probamos un resultado de interés teórico sobre la existencia de configuraciones óptimas.

---

CONJUNTOS DE FURSTENBURG Y UNA VARIANTE DEL PROBLEMA DE KAKEYA EN DIMENSIÓN 2

Un conjunto de Kakeya o Besicovitch es un conjunto compacto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que para cada  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$  existe un segmento unitario  $I_e$  en dirección  $e$  contenido en  $E$ . La conjetura "H" de Kakeya dice que los conjuntos de Kakeya en  $\mathbb{R}^n$  tienen dimensión de Hausdorff ( $\dim_H$ ) igual a  $n$ . Esta conjetura es cierta en dimensión 2 pero está abierta en dimensiones superiores. Un problema de similar aspecto en  $\mathbb{R}^2$  es el de los conjuntos de Furstenberg( $\alpha$ ): Dado un parámetro  $\alpha \in (0, 1]$  decimos que un conjunto compacto  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  es de Furstenberg( $\alpha$ ) si para cada dirección  $e \in \mathbb{S}^1$  existe una recta  $R_e$  tal que  $\dim_H(R_e \cap E) \geq \alpha$ . En este trabajo exponemos una prueba de la conjetura "H" de Kakeya en  $\mathbb{R}^2$  que se basa en la acotación fuerte de tipo (2, 2) conocida para el operador maximal de Kakeya  $K_\delta : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$  definido por

$$K_\delta(f)(e) = f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f| dx$$

donde  $T_e^\delta(a)$  denota al tubo de longitud unitaria, sección de radio  $\delta$  y eje principal en la dirección  $e$  centrado en el punto  $a$ . Adaptamos luego la prueba para demostrar el siguiente resultado conocido para los conjuntos de Furstenberg( $\alpha$ ): Si  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$  entonces  $\dim_H(E) \geq 2\alpha$ . Obtenemos como corolario inmediato usando el caso  $\alpha = 1$  una versión más fuerte de la conjetura "H" de Kakeya en  $\mathbb{R}^2$ : Un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que para cada dirección posible contiene un subconjunto de dimensión 1 de una recta en dicha dirección debe tener necesariamente dimensión de Hausdorff 2.

---

RESTRICCIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A ALGUNAS HIPERSUPERFICIES DE  $\mathbb{R}^3$

Para  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , y  $a, b \geq 2$ , sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = |x_1|^a + |x_2|^b.$$

Sea  $B$  la bola unitaria en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\Sigma = \{(x, \varphi(x)) : x \in B\}$  con la medida de Lebesgue inducida.

Consideramos el operador de restricción, a la superficie  $\Sigma$ , de la transformada de Fourier. Estudiamos el conjunto tipo

$$E = \left\{ \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in [0, 1] \times [0, 1] : \exists c > 0 \text{ con } \|\hat{f}\|_{L^q(\Sigma)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \forall f \in S(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Obtenemos condiciones necesarias para que un par  $\left( \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right)$  pertenezca a  $E$ .

También probamos que si  $\frac{3}{4} < \frac{1}{p} \leq 1$  y  $\frac{1}{q} > \frac{ab+a+b}{a+b} \frac{1}{p}$  entonces  $\left( \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \in E$ .

Más aún, si  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{3}$ , este resultado es "sharp" salvo por algunos puntos borde de  $E$ .

---

DESIGUALDADES CON PESOS PARA UN OPERADOR MAXIMAL DE CÉSARO

En [BM1] se estudia el operador maximal de Cesàro unidimensional

$$M_\alpha f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} |f(y)| \left(1 - \frac{|x-y|}{R}\right)^\alpha dy,$$

con  $-1 < \alpha \leq 0$ , en el contexto de los espacios  $L^p$  con pesos y en [BM2] se estudia una extensión del operador  $M_\alpha$  a dimensiones mayores. En este trabajo se presenta una versión  $n$  dimensional del operador  $M_\alpha$  diferente de la estudiada en [BM2] y que está relacionada con una forma diferente de entender la convergencia Cesàro múltiple. El operador maximal considerado es el siguiente:

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_{|\mathcal{R}|} \frac{1}{|\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{R}} |f(y)| \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{|x_i - y_i|}{R_i}\right)^{\alpha_i} dy,$$

con  $-1 < \alpha_i \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y donde el supremo se toma sobre todos los rectángulos  $n$  dimensionales  $\mathcal{R} = [x_1 - R_1, x_1 + R_1] \times \dots \times [x_n - R_n, x_n + R_n]$  tales que  $1/2 \leq R_i/R_j \leq 2$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Los resultados obtenidos son caracterizaciones de los pesos  $w$  para los cuales el operador  $\mathcal{M}_\alpha$  satisface desigualdades de tipo fuerte y de tipo débil con respecto a ese peso  $w$ .

**Referencias**

[BM1] Bernardis, A. y Martín-Reyes, F., Weighted inequalities for a maximal function in the real line. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 131 (2001), No 2, 267-277.  
 [BM2] Bernardis, A. y Martín-Reyes, F., The Cesàro maximal operator in dimension greater than one. J. Math. Anal. Appl., 288 (2003), 69-77.

---

ACOTACIÓN DE OPERADORES MAXIMALES GENERALIZADOS EN ESPACIOS DE ORLICZ

Sea  $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función convexa, no decreciente, tal que  $\eta(0) = 0$  y  $\eta(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , que satisface una condición  $\Delta_2$  y con derivada  $\eta'(t) \approx \eta(t)/t$ . Con esta función consideramos el operador

$$M_\eta f(x) = \sup_{B: x \in B} \|f\|_{\eta, B}$$

donde  $\|f\|_{\eta, B} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|} \int_B \eta\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \leq 1 \right\}$  y el supremo se toma sobre

todas las bolas  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $x$ . Con respecto a este operador probamos que son equivalentes las siguientes condiciones:

i)  $\int_0^{2t} \eta'\left(\frac{t}{s}\right) \frac{a(s)}{s} ds \leq Cb(Ct)$ , para todo  $t > 0$ .

ii)  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M_\eta f(x)) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(|f(x)|) dx$

iii)  $\|M_\eta f\|_\Phi \leq C \|f\|_\Psi$

donde  $\Phi(t) = \int_0^t a(s) ds$  y  $\Psi(t) = \int_0^t b(s) ds$ .

Se analizan, además, extensiones a espacios de tipo homogéneo.

---

UN TEOREMA DE MULTIPLICADORES PARA ESPACIOS DE HARDY CON PESOS  
 LATERALES

Sea  $m(\xi)$  una función acotada definida en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y  $T$  el operador multiplicador asociado a  $m(\xi)$  definido a través de la transformada de Fourier por

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

para  $f \in L^2$ . Sea  $K, \widehat{K} = m$  entonces  $Tf = K * f$ . Si  $m(\xi)$  es el límite de una función acotada y analítica en el semiplano superior entonces  $K$  está soportado en  $(-\infty, 0)$ .

En este trabajo estudiamos condiciones sobre  $m(\xi)$  que impliquen que  $T$  sea un operador acotado en el espacio de Hardy lateral  $H_+^p(\omega)$  donde  $0 < p < \infty$  y  $\omega$  es un peso en la clase  $A_s^+$ ,  $s \geq 1$ .

Más precisamente si para  $\ell \geq 0$  suficientemente grande y algún  $1 \leq q \leq 2$ ,  $m(\xi)$  satisface

$$\left( \int_{R/2 \leq |\xi| \leq R} |D^\alpha m(\xi)|^q d\xi \right)^{1/q} \leq cR^{1/q-\alpha},$$

para todo  $R > 0$ , y todo  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq \ell$  y, en caso de ser  $\ell$  no entero,

$$\left( \int_{R/2 \leq |\xi| \leq R} |D^{[\ell]} m(\xi) - D^{[\ell]} m(\xi - z)|^q d\xi \right)^{1/q} \leq c \left( \frac{|z|}{R} \right)^{\ell - [\ell]} R^{1/q-\ell},$$

con  $|z| < \frac{R}{2}$ , para todo  $R > 0$ , entonces  $T$  es un operador acotado en  $H_+^p(\omega)$ .

---

UNA ESTIMACIÓN PARA LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS MEDIDAS  
 SINGULARES

Consideramos para una clase de funciones  $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfacen una condición de homogeneidad no isotrópica  $\varphi(t^{\alpha_1}x_1, t^{\alpha_2}x_2) = t^m \varphi(x_1, x_2)$ , la transformada de Fourier  $\widehat{\mu}$  de la medida de Borel sobre  $\mathbb{R}^4$  definida por  $\mu(E) = \int_Q \chi_E(x, \varphi(x)) dx$  donde  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Damos bajo algunas hipótesis adicionales sobre  $\varphi$ , una estimación para  $\widehat{\mu}$  y de este hecho obtenemos un teorema de restricción para la transformada de Fourier usual en el gráfico de  $\varphi|_Q$ . Obtenemos también propiedades  $L^p$  mejoradas para el operador de convolución  $T_\mu f = \mu * f$ .

---

**Autores:** Crescimbeni, R. ; de la Torre, A. y Torrea J.L.  
**Lugar:** Universidad N. del Comahue, Universidad de Málaga, Universidad Autónoma de Madrid

---

#### ACOTACIÓN CON DOS PESOS DE OPERADORES LATERALES

Se plantea resolver el siguiente problema, presentado por Muckenhoupt, en el contexto de operadores laterales: Dado un operador sublineal  $T$  encontrar condiciones sobre la función positiva  $v$  tal que asegure la existencia de una función  $u$  de modo que

$$\left(\int |Tf(x)|^q u(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int |f(x)|^p v(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Son conocidos los resultados en este sentido, debido a Andersen y Sawyer [1], para la maximal de Hardy Littlewood lateral y la maximal fraccionaria lateral como así también para la integral fraccionaria lateral. Estudiamos el problema para estos operadores utilizando el método de J. L. Rubio de Francia basado en la relación entre las desigualdades vectoriales y las desigualdades con pesos. Asimismo obtuvimos condiciones suficientes de acotación para la integral singular lateral y para los operadores  $S_r f(x) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |A_n f(x) - A_{n-1} f(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}}$  y  $Tf(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \nu_k (D_k f(x) - D_{k-1} f(x))$  donde  $A_n f(x) = \frac{1}{2^n} \int_x^{x+2^n} f(y) dy$ ,  $D_k f(x) = \frac{1}{\epsilon_k} \int_x^{x+\epsilon_k} f(y) dy$ ,  $\epsilon_k$  una sucesión lacunary y  $\nu_k$  una sucesión acotada.

Es conocido que estos últimos operadores son operadores integrales singulares (ver [2] y [3]), pero se obtienen condiciones suficientes intermedias entre las que surgen de la acotación de la maximal lateral y de la integral singular lateral.

Se analizaron también las singularidades de los operadores  $S_r f$  y  $Tf$  para  $f$  acotadas.

#### Referencias:

- [1] Andersen, K y Sawyer E.: Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators. Trans. AMS 308 (1988).
- [2] A. de la Torre y J.L.Torrea: One sided discrete square function. Studia Math. 156(3) 2003.
- [3] Bernadis, Lorente, Martín-Reyes, Martínez, de la Torre, Torrea: Differential transform in weighted spaces. Preprint

---

**Autores:** Anibal Chicco Ruiz, Eleonor Harboure  
**Lugar:** Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, Universidad Nacional del Litoral

---

#### DESIGUALDADES CON PESOS PARA EL SEMIGRUPO DEL CALOR ASOCIADO A FUNCIONES DE LAGUERRE

Consideramos el semigrupo del calor asociado a tres tipos de funciones de Laguerre en  $(0, \infty)$  con medida  $d\mu$ , siendo  $d\mu(x) = dx$  en dos casos y  $d\mu(x) = x^\alpha dx$ , para  $\alpha > -1$ , en el restante. A partir de su forma integral, obtenemos acotaciones del núcleo muy precisas que nos permiten deducir condiciones suficientes sobre pesos  $\omega$  para obtener tipo fuerte  $(p, p)$  y tipo débil  $(1, 1)$  en el espacio  $((0, \infty), \omega(x)d\mu(x))$  para el operador maximal asociado. Previamente, habíamos obtenido condiciones para pesos potencia, resultando éstas necesarias y suficientes. Un resultado similar con pesos generales fue obtenido por Nowak considerando pesos  $A_p$ , pero esta clase no dependía del parámetro  $\alpha$  como era esperado.

---

**Autores:** Hugo Aimar  
**Lugar:** Santa Fe

---

#### REGULARIZACIÓN DE BASES DE HAAR

Como una aplicación del Lema de Cotlar se da una nueva demostración de que las regularizadas por convolución de bases de Haar producen bases de Riesz. La técnica puede extenderse a contextos geométricos generales.

---

**Autores:** Ivana Gómez, Hugo Aimar, Bibiana Iaffei  
**Lugar:** IMAL (CONICET); FIQ-FHUC (UNL)

---

#### UNA FÓRMULA DEL VALOR MEDIO Y REGULARIDAD DE TIPO BESOV PARA ECUACIONES PARABÓLICAS

Usando los resultados de [3] (ver también [1], pág. 52), se prueba una fórmula de valor medio para soluciones  $u$  de la ecuación del calor del tipo

$$u(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} K(x - y, t - s)u(y, s) dy ds$$

donde el núcleo  $K(\xi, \tau) = (|\xi|/\tau)^2 \eta(\rho(\xi, \tau))$  y  $\eta$  puede elegirse de modo que:  $\eta \geq 0$ ,  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\text{sup } \eta \subseteq [\varepsilon, 1]$  para algún  $\varepsilon > 0$ , y donde  $\rho(\xi, \tau) = (4\pi\tau)^{1/2} e^{|\xi|^2/4\tau}$ . La misma se utiliza para adaptar la técnica de [2] para obtener estimaciones en normas de Lebesgue hasta la frontera de dominios cilíndricos del gradiente de  $u$  en términos de ciertas normas de tipo Besov parabólico.

#### Referencias

- [1] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR 1625845 (99e:35001)
  - [2] David Jerison and Carlos E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 1, 161–219. MR 96b:35042
  - [3] N. A. Watson, *A theory of subtemperatures in several variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **26** (1973), 385–417. MR 0315289 (47 #3838)
-

COMPLETITUD DE LA PROPIEDAD DE DUPLICACIÓN EN LA MÉTRICA DE  
HAUSDORFF-KANTOROVICH

Sea  $(X, \rho)$  un espacio métrico compacto. Sea  $\mathcal{K}$  el conjunto formado por todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$  equipado con la distancia de Hausdorff  $d_H$ . Sobre el conjunto  $\mathcal{M}(X)$  de todas las medidas de Borel regulares sobre  $(X, \rho)$  definimos  $d_K(\mu, \nu) = \sup \{ |\int_X f d\mu - \int_X f d\nu| : f \in \text{Lip}_1 \}$ . La  $d_K$ -convergencia es equivalente a la convergencia débil  $*$  al mismo límite. Estudiaremos ciertos subconjuntos del espacio  $\mathcal{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{M}$ . Dados dos elementos  $(Y_i, \mu_i)$  de  $\mathcal{X}$ ,  $i = 1, 2$ , definiendo la distancia  $\delta((Y_1, \mu_1), (Y_2, \mu_2)) = d_H(Y_1, Y_2) + d_K(\mu_1, \mu_2)$ , se tiene que  $(\mathcal{X}, \delta)$  es un espacio métrico completo. Sean  $\mathcal{E}$  el conjunto de todos  $(Y, \mu) \in \mathcal{X}$  tal que  $\text{sop}(\mu) \subseteq Y$ , y sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de los  $(Y, \mu)$  en  $\mathcal{E}$  tales que  $\mu(Y) = 1$ . Probamos que  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{P}$  son subespacios métricos completos de  $(\mathcal{X}, \delta)$ . Introducimos la propiedad de duplicación de una medida de varias formas. En lo que sigue  $A \geq 1$ ,  $\alpha > 1$  y  $(Y, \mu) \in \mathcal{P}$  están dados. Decimos que  $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_A^\alpha$  si  $0 < \mu(B(y, \alpha r)) \leq A\mu(B(y, r))$  para todo  $y \in Y$  y  $r > 0$ . Diremos que  $(Y, \mu) \in \mathcal{S}_\varphi \mathcal{D}_A^\alpha$  si para todo  $y \in Y$  y  $r > 0$  tenemos que  $0 < \int \varphi_{y, \alpha r}(x) d\mu(x) \leq A \int \varphi_{y, r}(x) d\mu(x)$ , donde  $\varphi_{y, s}(z) = \varphi\left(\frac{\rho(y, z)}{s}\right)$  para  $s > 0$ , y  $\varphi$  es una función continua fija no negativa definida sobre  $\mathbb{R}_0^+$  con soporte compacto y tal que  $\varphi(0) > 0$ . El par  $(Y, \mu) \in \mathcal{BD}_A^\alpha$  si  $0 < \mu(B(y, \alpha r)) \leq A\mu(B(y, r + \epsilon))$  para todo  $y \in Y$ ,  $r > 0$   $\epsilon > 0$ . Finalmente  $(Y, \mu) \in \mathcal{ND}_A^\alpha$  si para todo  $y_1, y_2 \in Y$  y  $r > 0$  con  $\rho(y_1, y_2) < \alpha r$ , vale que  $0 < \mu(B(y_1, r)) \leq A\mu(B(y_2, r + \epsilon))$  para todo  $\epsilon > 0$ . El principal resultado que nos permite construir espacios de tipo homogéneo como límite de iteraciones, es el siguiente:

**Teorema.** *Los espacios  $\mathcal{S}_\varphi \mathcal{D}_A^\alpha$ ,  $\mathcal{BD}_A^\alpha$ , y  $\mathcal{ND}_A^\alpha$  son cerrados en  $(\mathcal{X}, \delta)$ , y en consecuencia toda contracción sobre ellos tiene un único punto fijo.*

---

ESPACIOS LIPSCHITZ CON MÉTRICA NO ISOTRÓPICA

Es conocido que los espacios Lipschitz pueden ser vistos como casos particulares de espacios de Besov, más concretamente una función pertenece al espacio  $\Lambda_\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$  si y sólo si  $\sup |\varphi_t * f(x)| \leq C t^\alpha$ , para  $\varphi$  función suave que permita utilizar la fórmula de reproducción de Calderón, y en donde las dilataciones  $\varphi_t$  son las usuales. Investigamos sobre la posibilidad de caracterizar los espacios Lipschitz asociados a una métrica no isotrópica de la misma manera, utilizando dilataciones no isotrópicas y haciendo uso de una fórmula de Calderón en este contexto. Asimismo estudiamos la posibilidad de caracterizar el espacio Lipschitz uno no isotrópico por medio de diferencias segundas.

Referencia:

- Hernández, E.- Weiss, G., *A First Course on Wavelets*, CRC Press, New York, (1996).
  - Stein E.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, (1970).
-



POTENCIAS NEGATIVAS DEL OPERADOR DE SCHRÖDINGER EN ESPACIOS BMO  
MODIFICADOS

Consideremos el operador de Schrödinger  $H = -\Delta + V(x)$ , donde el potencial  $V \geq 0$  satisface una desigualdad de Hölder al revés.

Si  $\alpha > 0$  y  $f$  suficientemente buena definimos el operador  $\mathcal{I}_\alpha f(x) = H^{-\alpha/2} f(x) = \int_0^\infty e^{-tL} f(x) t^{\alpha/2-1} dt$ , donde  $e^{-tH}$ , para  $t > 0$ , es el semigrupo del calor asociado a  $H$ .

Motivados por los trabajos de [1] y [2], si  $\beta \geq 0$  y  $w$  es un peso en  $\mathbb{R}^d$ , definimos el espacio  $BMO_H^\beta(w)$ , como el conjunto de las funciones localmente integrables  $f$  que satisfacen que para toda bola  $B = B(x, R)$ , se tiene  $\int_B |f - f_B| \leq C_1 w(B) |B|^{\beta/d}$ , y  $\int_B |f| \leq C_2 w(B) |B|^{\beta/d}$ , si  $R \geq \rho(x)$ , donde  $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B |f|$ ,  $\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-1}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}$  y  $C_1$  y  $C_2$  son constantes independientes de  $f$ .

Obtenemos que si  $0 < \alpha < d$  y exigimos a  $w$  ciertas propiedades, el operador  $\mathcal{I}_\alpha$  resulta acotado de  $L^{p,\infty}(w)$  en  $BMO_H^{\alpha-d/p}(w)$  para  $\frac{d}{\alpha} \leq p < \frac{d}{(\alpha-\delta)^+}$ , donde  $\delta$  depende del potencial  $V$ .

### Referencias

- [1] J. Dziubanski, G. Garrigós, T. Martínez, J. Torrea, and J. Zienkiewicz. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Math. Z.*, 249(2):329–356, 2004.
- [2] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Relations between weighted Orlicz and  $BMO_\phi$  spaces through fractional integrals. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 40(1):53–69, 1999.

ANÁLISIS DE MULTIRRESOLUCIÓN IRREGULARES

La idea central en el concepto de análisis de multirresolución es la de obtener aproximaciones sucesivas de un objeto en diferentes escalas. Esto es particularmente relevante en procesamiento de imágenes y otras aplicaciones. Los subespacios involucrados son invariantes por traslaciones en un reticulado, que se va refinando con las diferentes escalas.

En muchas situaciones sin embargo, es más realista, considerar grillas irregulares, que se van refinando de una manera arbitraria. Con este objetivo, se introduce el concepto de Análisis de Multirresolución Irregular (AMRI) en donde el subespacio inicial no es invariante por traslaciones enteras, pero esta generado por una cantidad finita de funciones y sus traslaciones en una grilla irregular fija.

Estos espacios han sido considerados en la literatura bajo el nombre de Espacios de Tipo Spline, aunque no asociados a subespacios de multirresolución. En este trabajo preliminar se prueba la existencia de AMRIs para una clase muy numerosa de grillas y generadores. Se observa además que estos AMRIs están asociados a wavelets con traslaciones y dilataciones irregulares consideradas recientemente en varios trabajos en el área.

**Autores: Alfredo L. González, Pedro J. Catuogno y Sebastián E. Ferrando**  
**Lugar: Universidad Nacional de Mar del plata**

---

#### EXPANSIONES EN MARTINGALAS ADAPTADAS, VIA UN ALGORITMO CODICIOSO

Se describe una construcción algorítmica de un sistema ortonormal, tipo Haar, óptimo, adaptado a una variable aleatoria de cuadrado integrable, en un espacio de probabilidad filtrado. Las expansiones en estos sistemas son martingalas, y la filtración asociada es generada por la v. a. de entrada, siendo ésta una propiedad crucial para su aplicación en finanzas.

El referido algoritmo está basado en el *principio de la bañera*, [Lieb and Loss, *Analysis*, AMS 1997], produciendo una selección de átomos, pertenecientes a una sucesión creciente de particiones, sobre los cuales está soportado el referido sistema. La expansión de la v. a. converge a ella.

---

**Autores: Bruno Mesz, Eduardo Serrano**  
**Lugar: UNSAM**

---

#### PROCESAMIENTO DE SEÑALES MUSICALES MEDIANTE PAQUETES DE ONDITAS

En esta presentación proponemos una primera familia de funciones, del tipo *paquetes de onditas*, adaptada al procesamiento de señales musicales. Las mismas se generan por la modulación, el cambio de escala y las traslaciones de una *función de onda esferoidal achatada* (prolate spheroidal wave function). Se pretende detectar la actividad de cada nota mediante convoluciones de estas funciones con la señal musical. Por otra parte, se prueba que la familia constituye un marco de un apropiado espacio de Paley-Wiener. En la aplicación numérica se emplean algoritmos eficientes para el cálculo de las funciones básicas. En los experimentos realizados con música monofónica, la aplicación permite una clara identificación de las notas presentes. Para la aplicación a música polifónica, parece promisorio el empleo de átomos armónicos formados agrupando funciones básicas centradas en los múltiplos de una frecuencia dada. Otra posibilidad es explotar la relación de doble escala que verifican las funciones básicas para operar con un esquema de multiresolución, donde los niveles de alta precisión temporal permiten localizar los ataques y los de alta resolución frecuencial las alturas. Para subsanar el hecho de que las funciones base no son absolutamente integrables se propone un esquema análogo empleando funciones splines de soporte compacto.

---

**Autores: Manuel Aguirre**

**Lugar: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As.**

---

UNA NUEVA EXPRESIÓN PARA EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN DE LAS DERIVADAS DE ORDEN K DE LA DELTA DE DIRAC SOPORTADA EN  $|x|^2 - m^2$

La distribución  $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$  es definida ([1], página 341) de la siguiente forma:

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) = (-1)^k \lim_{\alpha \rightarrow -k} \frac{(m^2 - |x|^2)_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1)$$

Usando la fórmulas

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} = \frac{(-1)^k}{\pi^{-\frac{n}{2}}} \sum_{l \geq \frac{n}{2} - k - 1} \left\{ \frac{(m^2)^l \Delta^{l - \frac{n}{2} + k + 1} \delta}{4^{l - \frac{n}{2} + k + 1} (l - \frac{n}{2} + k + 1)!} \right\} \quad (2)$$

for n even if  $k < \frac{n}{2}$

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} = \frac{(-1)^k}{\pi^{-\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{l \geq 0} \left\{ \frac{(m^2)^l \Delta^{l - \frac{n}{2} + k + 1} \delta}{4^{l - \frac{n}{2} + k + 1} l! (l + k + 1 - \frac{n}{2})!} \right\} \quad (3)$$

for n even if  $k \geq \frac{n}{2}$

Las cuales aparecen en([1]), en este trabajo se obtiene la siguiente fórmula

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-m^2)^l}{l!} \delta^{(k+l)}(|x|^2) \quad (4)$$

la cual permite darle un sentido la producto de convolución

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) * \delta^{(t)}(|x|^2 - m^2).$$

## Referencias

- [1] Aguirre T. Manuel., Distributional convolution product between the k-th derivative of Dirac's delta in  $|x|^2 - m^2$ , Integral Transforms and Special Functions, 2000, vol. 10, No. 1, pp. 71-80
- [2] Erdelchi A., Higher Transcendental Functions, Vol.I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

# ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Autores: Leandro Del Pezzo, Julian Fernandez Bonder, Julio Rossi**  
**Lugar: UBA- Buenos Aires**

---

## UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION PARA EL PRIMER AUTOVALOR DE STEKLOV DE UN PROBLEMA NO LINEAL

En este trabajo estudiamos el primer autovalor de Steklov,  $\lambda$ , del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u + \alpha\phi|u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda|u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio (abierto, conexo y acotado con borde suave). Realizamos un análisis de la dependencia del primer autovalor con respecto a la función de peso  $\phi$  y con respecto al parámetro  $\alpha$ . Probamos que si fijamos  $\alpha$  existe una función de peso  $\phi_\alpha$  que minimiza  $\lambda$  en el conjunto de todas las funciones medibles uniformemente acotadas y con integral fija.

Además, estudiamos el limite de  $\{\phi_\alpha\}$  cuando el parametro  $\alpha$  tiende a infinito y encontramos que el limite es el primer autovalor de Steklov en el dominio con un agujero donde la autofunción se anula. Este limite nos da una relación entre nuestro problema y el estudiado por Fernández Bonder-Rossi-Wolanski (ver Behavior of the best Sobolev trace constant and extremals in domains with holes. To appear in Bull. Sci. Math.)

---

**Autores: Déboli, Alberto ; Amster, Pablo**  
**Lugar: Departamento de Matemática ; FCEyN - Universidad de Buenos Aires**

---

## UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO A UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

H.B. Thompson [T] ha demostrado la existencia de al menos una solución del siguiente problema, que modeliza la electro difusión de dos iones con igual valencia que se desplazan a través de una membrana:

$$\begin{cases} y'' = y\left\{\lambda - \frac{y(0)^2 - y^2}{2} + \left[l\lambda + \frac{y(0)^2 - y(1)^2}{2}\right]x\right\} - \left[l\lambda + \frac{y(0)^2 - y(1)^2}{2}\right]D \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

donde  $x \in (0, 1)$ , y  $\lambda, l > 0$ , y  $D$  son parámetros físicos. Dicha existencia es demostrada bajo el supuesto de que

$$\lambda \geq 2l\left(1 - \frac{1}{(1+l)^2}\right)D^2$$

En este trabajo demostramos la existencia de una solución del problema análogo correspondiente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, con condición de frontera de tipo Neumann, bajo determinadas condiciones:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'' = \frac{1}{2}\mathbf{Y}^3 + \mathbf{A}(t, \mathbf{Y}(0), \mathbf{Y}(1))\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t, \mathbf{Y}(0), \mathbf{Y}(1)) \\ \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}'(1) = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde  $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ ,  $t \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{Y}^3 := (y_1^3, \dots, y_n^3)^t$  y  $\mathbf{A} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{B} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones continuas. La demostración se realiza utilizando un resultado de teoría de grado.

### Referencia:

[T] Thompson H.B: *Existence for Two-Point Boundary Value Problems in Two Ion Electrodifusion*, JMAA 184, 1 (1994) 82-94.

UNA APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL ANTIMÁXIMO A UN PROBLEMA PERIÓDICO  
DE CUARTO ORDEN

Estudiamos la existencia de soluciones para un problema no lineal de cuarto orden:

$$u^{(4)} + g(t, u, u'') = 0 \quad (1)$$

bajo condiciones de contorno periódicas:

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(T) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Demostremos un principio del antimáximo asociado uniforme, y desarrollamos un método de sub y super soluciones para (1-2) suponiendo que el problema admite una sub-solución  $\alpha$  y una super solución  $\beta$ , que satisfacen alguna de las siguientes condiciones (del tipo de "orden invertido"):

1.  $\alpha'' + k\alpha \geq \beta'' + k\beta$  para algún  $k$  tal que  $0 < k < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$ .
2.  $\alpha'' - k\alpha \leq \beta'' - k\beta$  para algún  $k$  tal que  $0 < k < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$ .
3.  $\alpha'' + k\alpha \leq \beta'' + k\beta$  para algún  $k$  tal que  $0 < k < \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$ .

Además, utilizando el método de quasilinealización, construimos mediante un esquema recursivo, una sucesión que converge cuadráticamente a la solución.

El método de quasilinealización fue desarrollado por Bellman y Kalaba [2], y generalizado por Lakshmikantham [4, 5]. Fue aplicado con éxito a diferentes problemas no lineales que admiten una sub-solución  $\alpha$  y una super-solución  $\beta$  ordenadas ( $\alpha \leq \beta$ ). En un trabajo reciente [3], fue generalizado al caso de orden invertido ( $\beta \leq \alpha$ ), para un problema de segundo orden.

## Referencias

- [1] P. Amster, P. De Nápoli; *An application of the antimaximum principle for a fourth order periodic problem*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. No. 3 (2006), pag. 1-12.
  - [2] R. Bellman, R. Kalaba; *Quasilinearisation and Nonlinear Boundary Value Problems*, American Elsevier, New York, 1965.
  - [3] R. Khan, *Existence and approximation of solutions of second order nonlinear Neumann problems*, Electronic Journal of Differential Equations Vol. 2005(2005), No. 03, 1-10.
  - [4] V. Lakshmikantham, *An extension of the method of quasilinearization*, J. Optim. Theory Appl., 82(1994) 315-321.
  - [5] V. Lakshmikantham, *Further improvement of generalized quasilinearization*, Nonlinear Analysis, 27(1996) 315-321.
-

**Autores: Germán Zorba**

**Lugar: Dto. de Matemática, Facultad de Cs. Exactas, UNLP**

---

#### ESTABILIDAD RESPECTO A DOS MEDIDAS

En el estudio de sistemas dinámicos no lineales, uno de los problemas clásicos es el estudio de la estabilidad, que podría presentarse como el estudio de cómo influyen las pequeñas perturbaciones del estado inicial en la evolución del sistema.

Además de las definiciones de estabilidad de puntos de equilibrio debidas a Lyapunov, varias otras formas de estabilidad han sido estudiadas en las últimas décadas, como por ejemplo estabilidad de ciclos límites, estabilidad con respecto a una parte de las variables, atractividad de conjuntos invariantes, etc.

También se han extendido los resultados conocidos a otras clases de sistemas tales como los diferenciales algebraicos, discretos, sistemas dinámicos abstractos en espacios métricos, etc.

Una definición de estabilidad que generaliza varias de las definiciones previas (y que puede extenderse fácilmente a otras clases de sistemas dinámicos) es la estabilidad respecto a dos medidas[1], en donde se definen dos funciones continuas no negativas del espacio de fase, una para medir la perturbación en el estado inicial y otra para medir la perturbación del estado final del sistema.

Aquí mostramos dos conjuntos de condiciones distintos bajo los cuales la atractividad uniforme implica la estabilidad del sistema (por atractividad uniforme nos referimos a que la perturbación tienda uniformemente a cero). También presentamos dos contraejemplos: en uno se muestra que la atractividad no uniforme no garantiza estabilidad; y en el otro se muestra que los resultados presentados no pueden mejorarse, en el sentido que las hipótesis no pueden relajarse de modo tal que sigan siendo válidos esos resultados.

#### Referencias

[1] Vorotnikov V. I., Partial Stability and Control: The State-of-the-art and Development Prospects, Automation and Remote Control, Vol. 66, No. 4, 2005, pp.511-561

---

**Autores: Langoni, Laura - Barraza, Oscar**

**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**

---

#### COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN UNA ECUACIÓN SEMILINEAR PARABÓLICA

En esta comunicación estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo del problema semilineal parabólico

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Es un hecho conocido que para  $1 < p \leq 1 + 2/N$  la solución  $u(t)$  no negativa verifica que  $\|u(t)\|_\infty$  tiende a  $+\infty$  en tiempo finito. Además, si  $p > 1 + 2/N$  y suponiendo que cierta norma de  $u_0$  es pequeña, el problema anterior admite solución global en tiempo. En este estudio haremos uso del método de la Entropía para obtener la tasa de decaimiento de dicha solución global. Este método ha sido aplicado exitosamente al comportamiento asintótico de soluciones globales de otras EDP, como por ejemplo en ecuaciones de tipo Fokker-Planck (Carrillo, Toscani, Jungel, Arnold, Markowich y Unterreiter).

---

**Autores:** C. Ruscitti, O. Barraza

**Lugar:** UNLP

**Nota:** Comunicación enviada para la Reunión 2005, no expuesta en dicha ocasión

---

ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES EN CIERTOS ESPACIOS DE BANACH

En este trabajo se estudia la estabilidad de las soluciones globales de la ecuación de Navier-Stokes en  $\mathbb{R}^3$ , suponiendo que las condiciones iniciales pertenecen a ciertos espacios de Banach. Se establecen condiciones suficientes bajo las cuales dichas soluciones resultan "exponencialmente" estables, suponiendo la existencia de soluciones fuertes de la ecuación. Además, se muestran las estimaciones que cumplen las soluciones perturbadas.

**Palabras claves:** soluciones fuertes, soluciones mild, perturbación y estabilidad de soluciones.

---

**Autores:** Claudia M. Gariboldi - Domingo A. Tarzia

**Lugar:** Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto. Río Cuarto. Argentina. - Depto. Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral. Rosario. Argentina.

---

RESULTADOS DE CONVERGENCIA DE UNA FAMILIA DE CONTROLES OPTIMOS FRONTERA EN PROBLEMAS ELÍPTICOS MIXTOS

Se considera un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , cuya frontera regular consiste de la unión de dos porciones disjuntas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Se formulan dos problemas elípticos mixtos  $(P)$  y  $(P_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) con la misma ecuación de Poisson en  $\Omega$ , con una condición de temperatura sobre  $\Gamma_1$  para  $(P)$  y una condición convectiva (con  $\alpha$  coeficiente de transferencia del calor) sobre  $\Gamma_1$  para  $(P_\alpha)$ . Se formulan los problemas de control frontera:

$$\text{hallar } q_{op} \in L^2(\Omega) \text{ tal que } J(q_{op}) = \underset{q \in U_{ad}}{\text{Min}} J(q) \quad (1)$$

$$\text{hallar } q_{op,\alpha} \in L^2(\Omega) \text{ tal que } J_\alpha(q_{op,\alpha}) = \underset{q \in U_{ad}}{\text{Min}} J_\alpha(q) \quad (2)$$

donde  $U_{ad}$  es un conjunto cerrado, convexo y no vacío de  $L^2(\Gamma_2)$ .

Se prueba que el funcional  $J$  es coercivo y G-diferenciable sobre  $L^2(\Gamma_2)$  y de la condición de optimalidad se deducen las condiciones de complementariedad en términos del estado adjunto del sistema  $(P)$ . Se prueba existencia y unicidad del control frontera óptimo en (1) y se dan algunas propiedades del funcional  $J$ . Similares resultados se prueban para  $J_\alpha$ , para cada  $\alpha > 0$  fijo. Finalmente se prueba que el estado del sistema  $u_{q_{op,\alpha}}$  y el estado adjunto del sistema  $p_{q_{op,\alpha}}$  del problema (2) son fuertemente convergentes en  $H^1(\Omega)$  al correspondiente  $u_{q_{op}}$  y  $p_{q_{op}}$  del problema (1) respectivamente, además el control óptimo  $q_{op,\alpha}$  del problema (2) es fuertemente convergente en  $L^2(\Gamma_2)$  al control óptimo  $q_{op}$  del problema (1).

---

**Autores: Santillan Marcus, Eduardo A.; Natale, María Fernanda; Tarzia, Domingo A.**

**Lugar: Universidad Austral, Rosario**

---

DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES TÉRMICOS DESCONOCIDOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO POROSO A TRAVÉS DE UN PROCESO DE DESUBLIMACIÓN CON ACOPLAMIENTO DE TEMPERATURA Y HUMEDAD

Se considera un modelo de flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante el congelamiento, con una sobre-condición de temperatura en el borde fijo para la determinación simultánea de coeficientes desconocidos del material semi-infinito  $k_1, k_2, c_1, c_2, a_m, \sigma, \rho, r$ :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{k_1}{\rho c_1} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; 0 < x < s(t); t > 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{k_2}{\rho c_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}; x > s(t); t > 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; x > s(t); t > 0$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}; T_2(x, 0) = T_2(+\infty, t) = t_0; u(x, 0) = u(+\infty, t) = u_0;$$

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = t_v;$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = u(s(t), t) \rho r \frac{ds}{dt}(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t), t) + \delta \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = 0; T_1(0, t) = t_s;$$

$$s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$$

Se hallan condiciones para la existencia de una solución, y las fórmulas correspondientes para los coeficientes a determinar.

BIBLIOGRAFÍA:

[Lu] A. V. Luikov, Int.J.Heat Mass Transfer 18 (1975) 1-14

[Mi] M. D. Mikhailov, Int.J.Heat Mass Transfer 19, (1976) 651-655

[SaTa] E. Santillan Marcus - D. A. Tarzia, Int.J.Eng.Sci. 38 (2000) 1651-1665

[Ta] D. Tarzia, Quarterly Appl.Math. 39 (1981), 491-497

---

**Autores: Domingo A. Tarzia - M; Boukrouche**

**Lugar: Univ. Austral - CONICET (Rosario, Argentina) - Univ. Saint Etienne (Saint-Etienne, Francia)**

---

COMBINACIONES CONVEXAS DE SOLUCIONES DE INECUACIONES VARIACIONALES ELIPTICAS

Sean  $V$  un espacio de Hilbert,  $V'$  su dual topológico,  $K$  un conjunto convexo, cerrado y no vacío de  $V$ ,  $g \in V'$  y  $a: V \times V \mapsto \mathbb{R}$  una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva. Se considera la siguiente inecuación variacional elíptica:

$$(IVE) \quad u \in K : a(u; v - u) \geq \langle g; v - u \rangle, \forall v \in K.$$

Para cada  $g_i \in V'$  con  $i = 1, 2$  se considera  $u_i = u_{g_i} \in K$  la única solución de la (IVE) para el dato  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ). Se establece la condición necesaria y suficiente para que la combinación convexa  $t u_1 + (1 - t) u_2$  con  $t \in [0; 1]$  sea la única solución de la (IVE) para el dato  $t g_1 + (1 - t) g_2$  de manera que se tenga la siguiente igualdad:

$$u_{t g_1 + (1-t) g_2} = t u_{g_1} + (1 - t) u_{g_2}, \quad \forall t \in [0; 1].$$

---



**Autores:** Griselda R. Itovich, Jorge L. Moiola y Hernán Cendra  
**Lugar:** Dpto. de Matemática, FaEA, Universidad Nacional del Comahue,  
Dpto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional  
del Sur (UNS) y Dpto. de Matemática, UNS

---

BIFURCACIÓN DE SOLUCIONES CUASIPERIÓDICAS CERCANA A LA SINGULARIDAD DE  
HOPF DOBLE NO RESONANTE

Se efectúa el análisis dinámico en el entorno de la singularidad de Hopf doble no resonante (HD), que puede caracterizarse por medio de dos parámetros independientes. A través de la teoría de formas normales, el problema se reduce al estudio de un sistema diferencial planar. Entre sus puntos de equilibrio, existen órbitas y soluciones cuasiperiódicas (o toros 2D). Éstas últimas también pueden bifurcarse y originan soluciones que involucran tres modos oscilatorios o toros 3D. Éste es el llamado caso *complejo* de HD (Kuznetsov, 1998).

A través de la metodología en el dominio frecuencia (Moiola and Chen, 1996) y la teoría de Floquet se construyeron las ramas de bifurcaciones Neimark-Sacker que nacen en la singularidad HD y dan lugar a la aparición de soluciones cuasiperiódicas. Para determinar la curva de inicio de soluciones cuasiperiódicas 3D, empleando formas normales se estableció la ecuación de su tangente que pasa por HD. Estos resultados permitieron hallar zonas del plano de parámetros, muy estrechas, donde aparecen los toros 3D y efectuar simulaciones con el programa LOCBIF (Khibnik *et al.*, 1993) que lo corroboran.

**Referencias:**

- Khibnik, A. I., Kuznetsov, Y. A., Levitin, V. V. and Nikolaev, E. V. [1993] Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODE's and iterated maps, *Physica D*, vol. **62**, pp. 360-371.
- Kuznetsov, Y. A. [1998] *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematics Science **112**. Springer-Verlag, New York.
- Moiola, J. L. and Chen, G. [1996] *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*. World Scientific, Singapore.
-

# FÍSICA MATEMÁTICA

**Autores: Alejandro Cabrera**

**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**

---

## SOBRE LAS ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS ASOCIADAS A LAS FASES DE BERRY NO ABELIANAS

El objetivo de este trabajo es presentar de un modo sistemático las estructuras geométrico-diferenciales que subyacen a la existencia de las famosas *fases de Berry* (no abelianas) en sistemas mecánico cuánticos. Contrariamente al tratamiento usual en la literatura, pondremos énfasis en la geometría de fibrados cuya base *es el espacio de parámetros físicos* del sistema cuántico.

Para ello, daremos una construcción general de un fibrado principal  $P^m$  con grupo estructural  $U(k)$  sobre  $B$ , siendo  $B$  el espacio de parámetros de los cuales depende el operador hamiltoniano  $H(b)$  que determina la dinámica en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . En dicho fibrado está condensada la información geométrica relevante del problema. Veremos que la conexión generalmente usada para definir la *fase geométrica o de Berry*, llamada la *conexión de Berry*, a pesar de tener una definición local, se extiende a una conexión principal en todo  $P^m$ .

La fase de Berry, al ser, por definición, la *holonomía* de la curva base en el espacio de parámetros, depende intrínsecamente de la geometría del fibrado subyacente. Nuestra construcción del fibrado  $P^m$  permite *deducir* dicha información geométrica relevante directamente de los datos *físicos* del problema. Éstos son: el espacio de parámetros y la dependencia funcional del hamiltoniano en estos parámetros.

Finalmente, aplicaremos esta construcción en un ejemplo concreto, motivado por la reciente implementación de fases geométricas al desarrollo de la *computación cuántica*, ilustrando las ventajas conceptuales de nuestro enfoque.

---

**Autores: Alejandro M. Mesón y Fernando Vericat**

**Lugar: IFLYSIB (CONICET-UNLP) y GAMEFI (UNLP)**

---

## ESTADOS DE GIBBS A TEMPERATURA CERO

Consideramos una familia de medidas  $\{\mu_q\}_{q \geq 1}$  que describa el espectro multifractal de entropías locales. Cada miembro de la familia es introducido como el estado de Gibbs de un potencial  $\varphi_q; X \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $X$  compacto. El límite  $q \rightarrow \infty$  es llamado el *límite a temperatura cero* debido a la interpretación del parámetro  $q$  como la inversa de la temperatura. Debido a la compacidad de  $X$  la secuencia de estados  $\{\mu_q\}_{q \geq 1}$  tiene un punto débil de acumulación  $\mu_\infty$  es que es llamado el *estado fundamental*. En general la secuencia  $\{\mu_q\}_{q \geq 1}$  no converge pero si hay una única medida maximizante  $\mu$  para  $\varphi = \varphi_1$  entonces la secuencia converge débilmente a  $\mu$ . El problema es cuando hay varias medidas maximizantes y sólo sabemos que hay un punto de acumulación, no necesariamente convergencia al estado fundamental. En esta comunicación abordaremos, en casos más generales que simbólicos dinámicos o hiperbolicidad los siguientes problemas:

- Probar que el estado fundamental  $\mu_\infty$  es maximizante para una cierta clase potenciales.
  - Relacionar la entropía para  $\mu_\infty$  con el límite para  $q \rightarrow \infty$  de las entropías de las  $\mu_q$ .
  - Mostrar que la entropía para el estado fundamental es la máxima entre las todas las entropías para otras medidas maximizantes.
-

EL ÁLGEBRA SIMPLÉCTICA DE LA MECÁNICA HAMILTONIANA

La evolución de un sistema dinámico, puede darse a través de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir las ecuaciones de Hamilton-Jácoobi. Las cuales dan lugar al estudio de una forma bilineal antisimétrica: *la forma simpléctica*.

Al considerar las características de movimiento, de acuerdo a la mecánica hamiltoniana, la determinación del campo de velocidades esta dado por la función hamiltoniana del sistema. Donde la relación lineal entre el campo gradiente del hamiltoniano y el campo de velocidades, permite determinar el flujo de evolución del sistema, el cuál involucra un forma simpléctica en el espacio fase.

Más generalmente, las funciones definidas sobre el espacio fase exhiben las características de la geometría simpléctica, donde la forma bilineal está dada por el paréntesis de Poisson, quien nos permite definir transformaciones lineales sobre dichas funciones generando un álgebra que permita construir nuevas expresiones para el hamiltoniano que faciliten su integrabilidad.

HACIA UN CÁLCULO FUNCIONAL DE OPERADORES ANTI-WICK

Sea  $A$  un operador cuya representación anti-Wick está dada por

$$(Af, g) = \int a(v, \bar{v})(f, \phi_v)(\phi_v, g)d\mu(v)$$

con  $d\mu(v)$  medida Gaussiana.

En este trabajo estudiaremos la relación (isometricamente isomorfa) que existe entre el Teorema de Gelfand-Maurin y la representación anti-Wick, para el caso de los operadores básicos de la mecánica cuántica.

Por otra parte analizaremos algunos operadores con símbolos radiales estudiando su comportamiento en el límite de  $\hbar \rightarrow 0$ .

**Referencias.**

- [1] I.M Gelfand , N. Ya. Vilenkin : “Generalized functions”, Vol. 4.
- [2] F. A Berezin, M. A Shubin “The Schrödinger equation” Moscow State University, (1983), Moscú.
- [3] S. Grudsky, N. Vasilevski, “Toeplitz operators on the Fock space: Radial component effects.” Integral Equations and Operator Theory, v. 44, no. 1, 2002, p. 10-37
- [4]L.A Coburn “On the Berezin -Toeplitz Calculus” the Proceedings of the AMS 129 (2001) pp. 3331-3338.

**Autores: M. Etchechoury y H. Cendra**

**Lugar: Departamento de Matemática, Fac. de Cs. Exactas, UNLP. Dto de Matemática, UNSur**

---

DINÁMICA DE UNA ESFERA SIMÉTRICA RODANDO SOBRE UN PLANO HORIZONTAL  
SIN DESLIZAMIENTO Y SIN GIRAR ALREDEDOR DEL EJE VERTICAL

En este trabajo se realiza un estudio completo de la dinámica de la esfera simétrica rodando sobre un plano horizontal sin deslizamiento y sin rodar alrededor de su eje vertical (restricción de Veselova).

Se obtienen explícitamente integrales de movimiento, en términos de funciones elementales, que determinan en forma completa el comportamiento del sistema. Además se describen los puntos de equilibrio y órbitas cerradas del sistema. Se muestra finalmente que el sistema es equivalente a una ecuación diferencial ordinaria sobre la variedad  $S^2 \times S^1$ .

**Referencias:**

[1] A.V. Borisov, I.S. Mamaev and A.A. Kilin, "Rolling a ball on a surface. New integrals and hierachy of dynamics", *Reg. Chaotic Dyn.* 7, 201 (2002).

[2] H. Cendra and M. Etchechoury, "Rolling of a symmetric sphere on a horizontal plane without sliding or spinning", to appear in *Reports on Mathematical Physics*.

---

**Autores: Balseiro Paula, Solomín Jorge**

**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**

---

EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT PARA SISTEMAS MECÁNICOS CON VÍNCULOS NO  
IDEALES

En este trabajo se estudian sistemas mecánicos con vínculos no ideales. Para encontrar las ecuaciones de movimiento se requiere el conocimiento del trabajo que realizan las fuerzas del vínculo sobre una determinada distribución en el espacio de configuración, que no necesariamente será el espacio de los desplazamientos virtuales. Encontraremos qué condiciones debe cumplir esta distribución para que el sistema quede bien determinado y se propone un Principio de Gauss.

---

DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS EN PRESENCIA DE TÉRMINOS  
MAGNÉTICOS

Una técnica muy importante en el estudio geométrico de sistemas mecánicos con simetrías es la de reducción. Por este medio es posible relacionar el sistema original con otro sistema en un espacio de menor dimensión. En el caso de sistemas mecánicos discretos (por ejemplo obtenidos mediante discretización de un sistema continuo) estas ideas han sido menos desarrolladas.

En esta comunicación discutiremos algunos aspectos de la reducción de sistemas en presencia de fuerzas cuyo comportamiento frente a las simetrías no es el correcto. Un ejemplo de este tipo de problemas lo constituye el sistema formado por una partícula cargada que se desplaza en un campo magnético. El objetivo es estudiar la discretización y reducción de sistemas de este tipo, caracterizados por la presencia de "términos magnéticos".

Referencias

1. S. Jalnapurkar, M. Leok, J. Marsden and M. West, "Discrete Routh reduction", Journal of Physics A: Mathematical and General, 39, (2006) 5521 - 5544.
2. J. Marsden and M. West, "Discrete Mechanics and Variational Integrators", Acta Numerica Vol. 10, 2001.

DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA ACÚSTICA ALREDEDOR DE UNA PERFORACIÓN  
RODEADA POR UN MEDIO POROSO PERMEABLE

Se considera el problema de distribución de densidad de energía acústica alrededor de una perforación rodeada por un medio poroso permeable. La acción de una fuente acústica de ultrasonido ubicada en el eje de la perforación es la encargada de definir el campo de ondas. Las propiedades del medio circundante se modelan utilizando la Teoría de Biot para medios porosos permeables.

Este modelo describe los dos medios de comunicación, la fase sólida y la fase líquida, se expresa la energía libre potencial como una expresión general de esta función en estado de equilibrio con una aproximación de segundo orden para la deformación del sólido y dilatación del fluido. Con las mismas condiciones se determina la densidad de energía cinética y la densidad de la función de dispersión.

Dos tipos de ondas longitudinales se propagan en medios de comunicación de Biot. Una de ellas corresponde al esqueleto elástico, la otra al fluido. El sistema de ecuaciones gobernantes se reduce a un sistema de tres ecuaciones de ondas, dos longitudinales y una transversal, expresadas en función de potenciales.

Las condiciones de contorno se formulan para un medio de poros abiertos.

La solución del problema se obtiene en términos de Fourier al igual que la densidad de energía.

Los cálculos numéricos para el análisis del comportamiento de la distribución de densidad de energía acústica contemplan parámetros del medio de Biot tales como: porosidad, permeabilidad, frecuencia de la fuente acústica. Se trabaja en idioma C++.

Los resultados obtenidos son chequeados por comparación con resultados análogos obtenidos para medios elásticos, considerando porosidades pequeñas.

---

# GEOMETRÍA DIFERENCIAL Y TEORÍA DE LIE

**Autores:** Rojas, Teresita A.; Nieva, Jose Luis

**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales- UNCa.

---

## VARIETADES DE LAGRANGE Y LEGENDRE EN EL CONTEXTO DE LA GR

En los problemas de mecánica independientes del tiempo, la estructura simpléctica natural es conocida como fibrado cotangente de la variedad de configuración. El estudio de las ecuaciones del movimiento, constituye la mecánica lagrangiana y es posible por un difeomorfismo introducir una estructura simpléctica para estos casos; una descripción de esta situación se desarrolla en términos de variedades lagrangianas y sus proyecciones en la configuración espacial.

En los problemas de mecánica dependientes del tiempo, el espacio donde está definido un campo hamiltoniano es una variedad de dimensión impar, como tal no puede admitir una estructura simpléctica, pero sí una estructura de contacto dada por una 1-forma. En este estudio se describen subvariedades de Legendre. La proyección de la variedad no es, en general, una variedad suave, tiene singularidades, que surgen de manera similar a las singularidades lagrangianas

En este trabajo se presenta el estudio de las variedades de Lagrange y Legendre en Relatividad General.

---

**Autores:** Graciela S. Birman

**Lugar:** UNCPBA - CONICET

---

## ESFERA OSCULATRIZ EN CIERTOS ESPACIOS LORENTZIANOS 2-DIMENSIONALES

Se estudian las fórmulas de Frenét para curvas no-nulas en los hiperespacios de  $L^3$ :  $S_1^2$ ,  $H_0^2$  y  $B$ -scroll.

A partir de ellos se obtienen las ecuaciones diferenciales de la esfera osculatriz en ellos, en términos de las curvaturas.

---

**Autores:** Graciela M. Desideri (1) y Graciela S. Birman (2)

**Lugar:** (1) NUCOMPA, UNCPBA, (2) NUCOMPA, UNCPBA-CONICET

---

## CURVAS NULAS ESPACIALES A PARTIR DE SUS CURVATURAS

En este trabajo se obtienen curvas nulas en el espacio tridimensional Lorentziano  $L^3$  como solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, las cuales, en este espacio, se expresan en términos de tres curvaturas.

Además, se analizan y se muestran casos particulares.

---

### ESPACIOS METRICOS CON METRICA HAUSDORFF

En este trabajo discutimos la estructura de las formas geométricas fundamentales en un Espacio Métrico de Hausdorff usando la métrica Hausdorff como herramienta para medir distancias entre conjuntos compactos. En un espacio métrico completo, la colección de todos los subconjuntos compactos no vacíos forman un espacio métrico completo, condición que se verifica para el par espacio de Hausdorff y métrica homónima.

Luego, se presentan algunos resultados que describan la relación entre la distancia Hausdorff en un espacio métrico de Hausdorff y la distancia euclidiana en un espacio euclideo n-dimensional. En este contexto se observa que las líneas euclidianas están embebidas en la geometría Hausdorff.

En un espacio euclidiano, sabemos que líneas distintas son paralelas o se intersectan exactamente en un punto, para las líneas Hausdorff se analizan las condiciones bajo las cuales éstas son paralelas y cuando se interceptan.

En este trabajo solo presentan estudios preliminares de los Espacios Métricos de Hausdorff con métrica homónima, quedando muchos temas abiertos por estudiar.

### ISOMETRÍAS EN VARIEDADES SUB-RIEMANNIANAS Y CONSECUENCIAS

El resultado que presentaremos consiste, por un lado, en la demostración de que las variedades sub-Riemannianas que admiten alguna contracción Riemanniana que posea un grupo de isometrías que induzca una acción efectiva, propiamente discontinua, cuyo conjunto de puntos fijos sea nunca denso, y tal que cada punto tenga un entorno localmente finito respecto del grupo de isometrías; y tal que adicionalmente posea una dilatación cuya diferencial tenga norma (respecto de la métrica de la contracción Riemanniana) que esté acotada globalmente por constantes mayores que 1 y cuya diferencial preserve el subfibrado del fibrado tangente sobre el que está definida la forma que induce la métrica sub-Riemanniana en la variedad y tal que la conjugación respecto de la dilatación sea un homomorfismo del grupo de las isometrías mencionadas, entonces es posible dotar canónicamente a la variedad sub-Riemanniana de una medida obtenida a partir del elemento de volumen de la contracción Riemanniana, y de este modo en caso de existir un conjunto fundamental para la variedad sub-Riemanniana que sea autosimilar respecto del grupo de isometrías y la dilatación y que tenga medida positiva, ello nos permite construir una sucesión de subespacios del conjunto de funciones de cuadrado integrable de la variedad la cual mostramos que satisface un conjunto de axiomas que corresponden a los de un análisis multirresolución en el caso euclídeo.

Por otro lado exhibimos algoritmos que permiten construir tales conjuntos fundamentales (no siempre de medida no nula), y mostramos que existen ejemplos no triviales de variedades sub-Riemannianas correspondientes a grupos de tipo Heisenberg donde pueden construirse efectivamente dichos análisis multirresolución.

**Autores: del Barco Viviana, Ovando Gabriela, Vittone Francisco**  
**Lugar: FCEIA-UNR**

---

SOBRE LA GEOMETRÍA DE GRUPOS DE LIE SOLUBLES CON MÉTRICAS  
BI-INVARIANTES

Presentamos resultados obtenidos sobre grupos de Lie solubles de dimensiones bajas que admiten una métrica bi-invariante. En dimensión cuatro tales grupos son conocidos como el grupo oscilador y el grupo de Boidol. Probamos que las respectivas álgebras de Lie se pueden construir a partir de la condición de bi-invarianza y parametrizamos este tipo de métricas que no resultan definidas. Estudiamos la geometría, computando conexiones, curvaturas y grupos de isometrías.

---

**Autores: Hulett Eduardo**  
**Lugar: FAMAF-CIEM, UNCba**

---

ON THE TWISTOR SPACE OF DE SITTER 3-SPACE

The twistor bundle  $\mathcal{Z}$  of the De Sitter space  $\mathbb{S}_1^3$  is the fiber bundle whose fiber  $\mathcal{Z}_p$  at a point  $p \in \mathbb{S}_1^3$  is the set of all oriented space-like 2-planes in  $T_p\mathbb{S}_1^3$  [L]. Thus  $\mathcal{Z}$  is a five dimensional  $SO(3,1)$ -homogeneous manifold (in fact a Stiefel manifold) on which we fix the normal metric. Based on [E-S] we build an  $SO(3,1)$ -invariant 4-dimensional "horizontal" distribution  $\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{Z}$  and two  $SO(3,1)$ -invariant almost complex structures  $J^1, J^2$  on  $\mathcal{H}$  which give rise to two invariant almost CR structures on  $\mathcal{Z}$ . Fixed  $i = 1$  or  $i = 2$ , we say that a smooth map from a Riemann surface  $\phi : M \rightarrow \mathcal{Z}$  is  $J^i$ -holomorphic if it is horizontal  $d\phi(TM) \subseteq \mathcal{H}$ , and satisfies a Cauchy-Riemann-type equation:

$$d\phi \circ J^M = J^i \circ d\phi,$$

where  $J^M$  is the complex structure on  $M$ . The main result of this work is a characterization of  $J^i$ -holomorphic maps  $\phi : M \rightarrow \mathcal{Z}$  in terms of the geometric invariants of their projections  $f = \pi \circ \phi : M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ .

[E-S] J. Eells and S. Salamon, *Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 12 (1985), 589.640.

[L] F. Leitner, *Twistorial construction of space-like surfaces in Lorentzian 4-manifolds*, arXiv.mathDG/9902101.

---



GRUPOS DE LIE POISSON ASOCIADOS A BIÁLGEBRAS DE TIPO COMPLEJO

Dada un álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$ , cada estructura hermitiana  $(\langle \cdot, \cdot \rangle, J)$  en  $\mathfrak{g}$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es ad-invariante, da origen a una biálgebra de Lie  $(\mathfrak{g}, \delta_J)$  que denominamos de *tipo complejo*. Usando la correspondencia entre grupos de Lie Poisson simplemente conexos y biálgebras de Lie (ver [D]), cada biálgebra de tipo complejo determina un grupo de Lie Poisson simplemente conexo  $G$  con propiedades especiales. En el presente trabajo consideramos estos grupos de Lie Poisson, obteniendo en algunos casos particulares las foliaciones simplécticas y estudiando el problema de linealización de la estructura de Poisson.

BIBLIOGRAFÍA

[D] V. G.- DRINFELD, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, USA, 1986, vol. 1, AMS, Providence, 1987, 798–820.

---

ÓRBITAS CERRADAS EXTRÍNSECAMENTE SIMÉTRICAS EN VARIEDADES DE BANDERAS COMPLEJAS

Sea  $\mathcal{F} = G^C/Q$  una variedad de banderas complejas y  $M = G \cdot o = G/(G \cap Q)$  la única  $G$ -órbita cerrada en  $\mathcal{F}$  donde  $G$  es una forma real no compacta de  $G^C$ .  $M$  tiene una  $CR$ -estructura natural que hace de la inclusión  $M \rightarrow \mathcal{F}$  una  $CR$ -inmersión. Tanto  $\mathcal{F}$  como  $M$  pueden realizarse como variedades homogéneas de grupos compactos.  $\mathcal{F}$  de  $G_u$  (forma real compacta de  $G^C$ ) y  $M$  de  $K$  (compacto maximal de  $G$ ), actuando cada uno de ellos por  $CR$ -difeomorfismos de  $\mathcal{F}$  y  $M$  respectivamente. Consideramos en  $\mathcal{F}$  la métrica Riemanniana generada por la forma de Killing de  $\mathfrak{g}_u = Lie(G_u)$  y en  $M$  la métrica inducida.

Si  $\mathfrak{g} = Lie(G)$  es un álgebra de Lie semisimple de Levi-Tanaka se sabe, [1], que  $M$  es un  $CR$ -espacio simétrico. Para esta estructura probamos que:  $M$  es una subvariedad extrínsecamente simétrica de  $\mathcal{F}$  sí y sólo sí  $\mathfrak{g}$  es de clase 2.

Exhibimos también ejemplos de que este resultado extiende a situaciones mas generales.

[1] Lotta A. Nacinovich M. *On a class of symmetric CR-manifolds*. Adv. Math. 191 (2005) 114-146.

---

**Autores: C.U. Sanchez, W.Dal Lago, A. M. Giunta y J.E.Tala**  
**Lugar: Córdoba y San Luis**

---

#### VARIEDAD DE SECCIONES NORMALES DE SUBVARIIDADES ESFÉRICAS

Sea  $M$  una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional compacta y conexa y  $I : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  un "embedding" isométrico en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Diremos que la subvariedad  $M$  es *esférica* si está contenida en una esfera de radio  $r$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Dado un punto  $p \in M$  denotamos como en trabajos anteriores ([1], [2])  $\widehat{X}_p[M] = \{Y \in T_p(M) : \|Y\| = 1, (\overline{\nabla}_X \alpha)(X, X) = 0\}$ . Sea  $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  un marco local ortonormal adecuado del fibrado normal definido en un abierto  $U \subset M$ . Consideramos, para  $X \in T_E(M)$ ,  $E \in U$ , los siguientes polinomios

$$P_j(X) = \langle \omega_j(E), (\overline{\nabla}_X \alpha)(X, X) \rangle, \quad j = 1, \dots, k.$$

Ellos definen la variedad  $\widehat{X}_E[M]$  en  $E$  por la condición  $P_j(X) = 0$ , para  $j = 1, \dots, k$ ,  $\|X\| = 1$ . Estudiamos los gradientes de estos polinomios y en particular su independencia lineal. Estudiamos además su armonicidad.

[1] Dal Lago, W. , García, A. and Sánchez, C.: Planar normal sections on the natural imbedding of a flag manifold, *Geom. Dedicata* **53** (1994), 223-235.

[2] Sánchez, C., García, A. and Dal Lago, W.: *Planar normal sections on the natural imbedding of a real flag manifold*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **41** (2000), 513-530.

---

**Autores: Gabriela Ovando**  
**Lugar: FCEIA - UNR**

---

#### ALGEBRAS DE LIE DOS PASOS NILPOTENTES CON METRICAS AD-INVARIANTES

Describimos las álgebras de Lie dos pasos nilpotentes que admiten una métrica ad-invariante. La estructura algebraica puede darse a partir de un espacio vectorial  $\mathfrak{v}$ , muniendo de un producto interno y un homomorfismo  $\varphi : \mathfrak{v} \rightarrow so(\mathfrak{v})$ , que satisface la condición  $\varphi(v)v = 0$  para todo  $v \in \mathfrak{v}$ . Usamos este resultado para construir ejemplos de estas álgebras de Lie a partir de álgebras de Lie semisimples compactas y lo aplicamos a la construcción de r-matrices.

---

### CONTINUIDAD DEL OPERADOR DE BEREZIN

Sea  $G$  un grupo de Lie semisimple conexo. Fijamos un subgrupo maximal compacto  $K$  y un subgrupo reductivo  $H$  de  $G$  de modo que  $L := K \cap H$  es un subgrupo maximal compacto de  $H$ . Sea  $E \rightarrow G/K$  un fibrado homogéneo de dimensión finita y consideremos un operador diferencial  $G$ -invariante y elíptico  $D$  en las secciones de  $E$ . Sea  $F \rightarrow H/L$  el pull-back de  $E$  sobre  $H/L$ . Por tanto, esta bien definida la transformación lineal  $r : Ker_{L^2}(D) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$ . Hemos demostrado

Teorema

- i)  $r(Ker_{L^2}(D)) \subset L^2(F)$ .
- ii) La transformación lineal  $r : Ker_{L^2}(D) \rightarrow L^2(F)$  es  $(2,2)$ -continua.
- iii) Si  $Ker_{L^2}(D)$  consiste de representaciones integrables de  $G$  entonces

$$r : Ker_{L^2}(D) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$$

es  $(p,p)$ -continua para  $1 \leq p < \infty$ .

La demostración utiliza el fenómeno de Kunze-Stein, el cual afirma: si  $h$  es una función  $p$ -integrable en  $G$  para algún  $1 \leq p < 2$ , entonces, convolución por  $h$  define un operador lineal continuo en  $L^2(G)$ .

---

### REPRESENTACIONES FIELES DE DIMENSIÓN MÍNIMA DE ÁLGEBRAS DE LIE DE HEISENBERG TRUNCADAS

El Teorema de Ado afirma que toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  admite una representación fiel  $(\pi, V)$  de dimensión finita. Sin embargo el invariante  $\mu(\mathfrak{g}) = \min\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}$  es en general muy difícil de calcular para un álgebra de Lie arbitraria  $\mathfrak{g}$ . Se sabe por ejemplo que si  $\mathfrak{g}$  es nilpotente graduada de dimensión  $n$  entonces  $\mu(\mathfrak{g}) \leq n + 1$ .

Sea  $\mathfrak{h}_m$  el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión  $2m + 1$  y sea  $\mathfrak{h}_{m,k} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathbb{C}[t]/(t^{k+1})$  el álgebra de Lie de Heisenberg truncada. Por diversos motivos, esta álgebra de Lie, que tiene dimensión  $n = (2m + 1)(k + 1)$ , es muy estudiada. En este trabajo construimos representaciones fieles de  $\mathfrak{h}_{m,k}$  de dimensión  $(k + 1)(m + 1) + 1$  y demostramos que  $\mu(\mathfrak{h}_{m,k}) \geq (k + 1)m + 2$ . Es decir que

$$\frac{1}{2}n - \frac{k + 1}{2} + 2 \leq \mu(\mathfrak{h}_{m,k}) \leq \frac{1}{2}n + \frac{k + 1}{2} + 1.$$

Este resultado para  $k = 0$  implica que  $\mu(\mathfrak{h}_m) = m + 2$ , lo cual es bien conocido. Además probamos que  $\mu(\mathfrak{h}_{m,k}) = (k + 1)(m + 1) + 1$  para  $k = 1, 2$ .

---

**Autores:** A. Brega, L. Cagliero y J. Tirao  
**Lugar:** Fa. M. A. F, Universidad Nacional de Córdoba

---

LA IMAGEN DEL HOMOMORFISMO DE LEPOWSKY PARA TODO GRUPO DE LIE  
SEMISIMPLE DE RANGO SPLIT UNO

Sea  $G$  un grupo de Lie semisimple real, no compacto, conexo, y con centro finito, y sea  $K$  un subgrupo maximal compacto de  $G$ . Si  $k$  y  $g$  denotan las complexificaciones de las álgebras de Lie de  $K$  y  $G$  respectivamente,  $U(g)$  será el álgebra universal de  $g$  y  $U(g)^K$  denotará el centralizador de  $K$  en  $U(g)$ . Muchos aspectos de la teoría de representaciones de dimensión infinita de  $G$  se reducen a propiedades de la estructura y de la teoría de representaciones de dimensión finita del álgebra  $U(g)^K$ . Para estudiar esta álgebra B. Kostant sugirió considerar la proyección  $P$  de  $U(g)^K$  en  $U(k)^M \otimes U(a)$  inducida por la restricción de  $g$  a  $k \oplus a$ . La aplicación  $P$  es un anti-homomorfismo inyectivo de álgebras, por lo tanto para llevar a cabo este programa es necesario determinar la imagen de  $P$ . En esta dirección, Tirao definió una subálgebra  $B$  de  $U(k)^M \otimes U(a)$  que es esencial para la descripción de  $P(U(g)^K)$ . En efecto, en colaboración con L. Cagliero y J. Tirao, hemos caracterizado recientemente la imagen de  $P$  cuando  $G = F_4$ , completando así la descripción de esta imagen para todo grupo de Lie semisimple de rango split uno. El resultado obtenido es el siguiente,

**Teorema.** Si  $G$  es un grupo de Lie semisimple de rango split uno entonces:  $P(U(g)^K) = B^W$  si  $\text{rango}(G) \neq \text{rango}(K)$ , y  $P(U(g)^K) = B$  si  $\text{rango}(G) = \text{rango}(K)$ .

Aquí  $B^W$  es la subálgebra de todos los elementos en  $B$  que son invariantes bajo la acción producto tensorial de  $W$  en  $U(k)^M$  y la acción del grupo de Weyl trasladado en  $U(a)$ .

---

**Autores:** Pablo Román y Juan Tirao  
**Lugar:** CIEM-CONICET, FaMAF, UNC

---

FUNCIONES ESFÉRICAS Y EL OPERADOR HIPERGEOMÉTRICO MATRICIAL

Para determinar todas las funciones esféricas matriciales asociadas a los pares simétricos duales  $(G, K) = (\text{SU}(3), \text{U}(2))$  y  $(\text{SU}(2, 1), \text{U}(2))$ , asociamos a cada función esférica  $\Phi$  sobre  $G = \text{SU}(3)$  o  $\text{SU}(2, 1)$  una función  $H = H(u) \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ . Estas funciones  $H$  son autofunciones de dos operadores diferenciales de segundo orden  $D$  y  $E$ , que son los mismos para  $G = \text{SU}(2, 1)$  y  $G = \text{SU}(3)$ . Encontramos un polinomio matricial  $\psi(u)$  que usamos para con-  
jugación el operador  $D$  en el operador hipergeométrico matricial

$$\tilde{D}H = u(1-u)H''(u) + (C - uU)H' - VH.$$

Por lo tanto podemos describir las funciones esféricas en términos de la función hipergeométrica matricial  ${}_2H_1 \left( \begin{smallmatrix} U \\ C \end{smallmatrix}; V+\lambda; u \right)$ . Además, esta conjugación lleva autofunciones de  $D$  analíticas en  $u = 0$  en autofunciones de  $\tilde{D}$  analíticas en  $u = 0$ , lo que nos permite probar que, en el caso de  $\text{SU}(3)$ , las funciones  $H$  asociadas a las funciones esféricas resultan polinomios en  $u$ . Finalmente damos una aplicación inyectiva entre el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de  $\text{SU}(3)$  de tipo  $(n, \ell)$  en el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de  $\text{SU}(2)$  del mismo tipo.

---

**Autores: Juan Tirao**  
**Lugar: Córdoba**

---

#### POLINOMIOS MATRICIALES ORTOGONALES Y OPERADORES DIFERENCIALES

La teoría de polinomios ortogonales matriciales fue iniciada por Krein en 1949 y más recientemente ha cobrado un renovado interés. En este trabajo consideramos sucesiones  $P_n$  de polinomios matriciales ortogonales con respecto a un peso matricial  $W = W(t)$ , y operadores diferenciales lineales

$$D = \sum_{j=0}^s \left(\frac{d}{dt}\right)^j F_j(t)$$

donde los coeficientes son funciones a valores matriciales. En particular nos interesa el álgebra

$$\mathcal{D}(W) = \{D : P_n D = \Lambda_n(D) P_n\},$$

de todos los operadores diferenciales que tienen a los  $\{P_n\}$  como autofunciones. Presentaremos algunos resultados preliminares y daremos una idea de la demostración de que  $\mathcal{D}(W)$  tiene una única estructura de estrella algebra tal que un operador  $D \in \mathcal{D}(W)$  es simétrico si y solo si  $D = D^*$ .

---

**Autores: Pacharoni, Ines y Román, Pablo**  
**Lugar: FaMAF, UNCórdoba**

---

#### POLINOMIOS ORTOGONALES Y EL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO

La teoría del análisis armónico en espacios homogéneos está estrechamente relacionada con la teoría de funciones especiales. En particular las funciones esféricas zonales en un espacio simétrico Riemanniano de rango uno pueden ser expresadas en términos de la función hipergeométrica de Gauss, en el caso particular de espacios compactos se obtienen polinomios de Jacobi.

En este trabajo se pone de manifiesto la relación entre las funciones esféricas matriciales, los polinomios ortogonales y la función hipergeométrica matricial, en el caso del espacio proyectivo complejo  $P_n(\mathbb{C}) = \text{SU}(n+1)/\text{U}(n)$ .

Las funciones esféricas de tipo arbitrario son autofunciones del operador de Casimir y pueden ser expresadas en términos de una familia de polinomios ortogonales matriciales  $\{P_n(t)\}$ , donde cada  $P_n$  es autofunción de un cierto operador diferencial de segundo orden  $D$ . En este trabajo obtenemos expresiones explícitas de dicha familia de polinomios ortogonales en términos de la función hipergeométrica matricial.

---

**Autores: Tim Bratten**  
**Lugar: UNICEN**

---

### MORFISMOS Y N-COHOMOLOGÍA

Sea  $G_0$  un grupo reductivo de clase Harish-Chandra con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$  y sea  $\mathfrak{g}$  la complexificación de  $\mathfrak{g}_0$ . Una subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  se llama *linda* si  $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$  es una forma real de un factor de Levi de  $\mathfrak{p}$ . Cuando  $\mathfrak{p}$  es linda entonces el normalizador  $L_0$  de  $\mathfrak{p}$  en  $G_0$  es un grupo reductivo de clase Harish-Chandra con álgebra de Lie  $\mathfrak{l}_0$  y el nilradical  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{p}$  determina una estructura compleja en la variedad

$$S = G_0/L_0.$$

Dado la globalización minimal  $V_{\min}$  de una representación para  $L_0$  podemos definir un fibrado vectorial holomorfo  $\mathbb{V}$  sobre  $S$ . Se sabe que las cohomologías con soporte compacto  $H_c^p(S, \mathbb{V})$  son globalizaciones minimales de representaciones para  $G_0$ .

Supongamos que  $M_{\max}$  es la globalización maximal de una representación para  $G_0$ . En un trabajo reciente [V, Conjetura 10.3 (4)] D. Vogan hace una conjetura relacionando

$$\text{Ext}_{L_0}^q(V_{\min}, H^q(\mathfrak{n}, M_{\max})) \text{ con } \text{Ext}_{G_0}^q(H_c^p(S, \mathbb{V}), M_{\max})$$

donde  $H^q(\mathfrak{n}, M_{\max})$  indica la  $\mathfrak{n}$ -cohomología de  $M_{\max}$ . En este trabajo mostraremos como probar una version fuerte de la conjetura de Vogan bajo las hipótesis que  $V_{\min}$  es irreducible, que el caracter infinitesimal de  $H_c^p(S, \mathbb{V})$  es regular y que el centro  $Z(\mathfrak{g})$  del álgebra envolvente  $U(\mathfrak{g})$  actúa por un caracter en  $M_{\max}$ .

[V] Vogan, D.; *Unitary representations and complex analysis*. Se encuentra en: <http://www-math.mit.edu/~dav/paper.html>.

---

**Autores: Araujo, J. O. - Bigeón, J. J. - Paz, K. A.**  
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN**

---

### REPRESENTACIONES MODULARES DEL GRUPO SIMÉTRICO GENERALIZADO

En [1] se presenta una realización de las representaciones modulares del grupo simétrico sobre el espacio dual de un espacio de funciones polinomiales. Aquí presentamos una extensión de los resultados anteriores para dar una descripción análoga de las representaciones irreducibles del grupo simétrico generalizado  $\mathfrak{S}_n^m$  en característica  $p$ , cuando  $p$  no divide a  $m$ .

[1] Aguado, J. & Araujo, J.: *Representations of the Symmetric Group  $\mathfrak{S}_n$  on  $K[x_1, \dots, x_n]$* , Revista de la Unión Matemática Argentina Vol. 41, 2, 1998.

---

**Autores: Bigeón, J. J. - Araujo, J. O. - Fernández, L. B.**  
**Lugar: Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN**

---

UN MODELO DE GEL'FAND PARA  $G(n, p, p)$ .

En [1] se presenta un modelo de Gel'fand en el espacio de las funciones polinomiales para un grupo de Weyl de tipo  $B_n$  y en [2] se estudian las restricciones de las representaciones irreducibles de un grupo de Weyl de tipo  $B_n$  obtenidas en [1] a un subgrupo de tipo  $D_n$ .

Aquí presentamos una extensión de los trabajos anteriores al caso de  $G(n, p, p) \subset G(n, 1, p)$  si  $p$  es un número primo que no divide a  $n$ . Esto nos permite encontrar un modelo de Gel'fand en el espacio de las funciones polinomiales para  $G(n, p, p)$ .

[1] Araujo, J. O., A Gel'fand Model for a Weyl Group of Type  $B_n$ . *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 44, no. 2 (2003) 359-373.

[2] Araujo, J.O., Bigeón, J.J., A Gel'fand Model for a Weyl group of type  $D_n$  and the branching rules  $D_n \subset B_n$ , *Journal of Algebra* 294 (2005) 97-116.

---

**Autores: Jorge N. López - Luiz A. B. San Martin - Paulo Ruffino**  
**Lugar: Universidad Nacional de Mar del Plata**

---

CONJUNTOS DE CONTROL Y SOPORTES DE MEDIDAS INVARIANTES

Sea  $G$  un grupo de Lie semi simple, no compacto, con centro finito. Consideremos la descomposición de Iwasawa  $G = KAN$  y  $M$  el normalizador de  $A$  en  $K$  y  $\mathbb{B} = G/MAN$  el flag maximal. Consideramos  $\mathbb{P}'$  un recubrimiento de  $\mathbb{B}$ . Sea  $S$  semigrupo de  $G$  con interior no vacío.  $S$  como subconjunto de  $G$  actuando a izquierda genera una dinámica no trivial en  $\mathbb{P}'$ . Un conjunto  $C$  en  $\mathbb{P}'$  es un *conjunto de control invariante por la acción de  $S$*  ( $S$ -i.c.s) si  $\forall x \in C : \overline{Sx} = \overline{C}$  y es maximal con esa propiedad [2]. Si  $\nu$  es una medida en  $G$  ( $\nu \ll \text{Haar}$ ), una medida  $\mu$  en  $\mathbb{P}'$  es  $\nu$ -invariante si  $\nu * \mu = \mu$ . En este contexto una medida  $\nu$ -invariante se dice *ergódica* si no puede ser escrita como combinación convexa de otras medidas  $\nu$ -invariantes. Se demuestra que los soportes de las medidas  $\nu$ -invariantes son los  $S$ -i.c.s. En [1] se demuestra que en el flag maximal el único  $S$ -i.c.s es soporte de una única medida invariante. Usando técnicas de desintegralización de medidas se demuestra que en todo  $\mathbb{P}'$  cada  $S$ -i.c.s es soporte de una única medida ergódica. El interés radica en la posibilidad del estudio de las funciones  $\nu$ -harmónicas en  $G$  a partir de las medidas  $\nu$ -invariantes.

**Bibliografía**

[1] Y. Guivarc'h, A. Raugi -Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **69**

[2] San Martin, L.A.B. - Invariant control sets on flag manifolds. *Math. Control Signals Systems*, **6** (1993) 41-61.

---

# LÓGICA Y COMPUTABILIDAD

**Autores: Aldo Figallo Jr.**

**Lugar: Universidad Nacional de San Juan. Universidad Nacional del Sur**

---

## NOTAS SOBRE ÁLGEBRAS ECUACIONALMENTE ORDENADAS LIBRES SOBRE CONJUNTOS ORDENADOS

En esta nota continuamos con el análisis de la construcción presentada en [3]. En particular, hemos demostrado que si la variedad  $\mathbf{V}$  está generada por un álgebra ecuacionalmente ordenada y tal que el orden es de anticadena, entonces el álgebra libre  $L_{\mathbf{V}}(I)$  sobre un conjunto ordenado  $I$  existe si, y sólo si,  $I$  es una anticadena.

También hemos obtenido resultados sobre  $L_{\mathbf{V}}(I)$  en los casos que  $\mathbf{V}$  es la variedad de las álgebras de Lukasiewicz-Moisil de orden  $n$  sin negación y con negación (ver [1], [2]).

## Referencias

- [1] V. Boiescu, A. Filipoiu, G. Georgescu, S. Rudeanu, *Lukasiewicz-Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, 1991.
  - [2] R. Cignoli, *Moisil algebras*, Notas de Lógica Matemática 27(1970), Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina.
  - [3] A. Figallo Jr., *Free algebras over a poset*, Algebraic and Topological Methods in Non-Classical Logics II, Barcelona, 2005.
- 

**Autores: M. Canals Frau, J. Carrizo, A. V. Figallo, I. Pelegrina**

**Lugar: Universidad Nacional de San Juan. Universidad nacional del Sur**

---

## DUALIDADES PARA LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING SIMÉTRICAS $(n + 1)$ -VALUADAS CON OPERACIONES ADICIONALES

En [1] hemos introducido las álgebras de Heyting Simétricas  $(n+1)$ -valuadas con operaciones adicionales (ver también [2]).

En esta nota obtenemos dos dualidades topológicas para esta variedad de álgebras.

## Referencias

- [1] A. V. Figallo, M. Canals Frau, J. Carrizo, I. Pelegrina. Symmetric  $(n+1)$ -valued Heyting algebras with additional operations. LIV Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Noticiero de la Unión Matemática Argentina. 121–121. 2004
  - [2] L. Iturrioz. Modal operators on symmetrical Heyting Algebras. Departamento de Matemática, Universidad Claude-Bernard, Lyon I, 69621 Villeurbanne, Francia.
-



### WEAK QUASI-STONE ALGEBRAS

En este trabajo introducimos la variedad  $WQS$  de las weak-quasi-Stone álgebras como una generalización de la variedad  $QS$  de quasi-Stone álgebras introducidas y estudiadas en [1]. Aplicaremos la dualidad desarrollada en [2] para la variedad  $\mathcal{N}$  de  $\neg$ -retículos para dar una dualidad para  $WQS$ .

Probaremos que las weak-quasi-Stone álgebras están caracterizadas como aquellos  $\neg$ -retículos, tales que sus elementos regulares forman una subálgebra. A su vez probaremos que es posible caracterizar las weak-quasi-Stone álgebras mediante ciertas congruencias principales del reducto de retículo.

Por otro lado, determinaremos las simples y subdirectamente irreducibles, generalizando ciertos resultados de [1].

### Referencias

- [1] N. A. SANKAPPANAVAR AND H. P. SANKAPPANAVAR, *Quasi-Stone algebras*. Math. Logic Quarterly, Vol. 39, (1993), 255-268.
- [2] S. A. CELANI, *Distributive lattices with a negation operator*, Math. Logic Quarterly, Vol. 45, (1999), 207-218.

### LAS ÁLGEBRAS DE LUKASIEWICZ RESIDUADAS DE ORDEN $(n+1)$ CON TODOS LOS OPERADORES DE POSIBILIDAD DE MOISIL MONÁDICAS

Las álgebras *álgebras de Lukasiewicz residuadas de orden  $(n+1)$  con todos los operadores modales de Moisil monádicas*, o  $mpiL_{n+1}$ -álgebras para abreviar, fueron introducidas en [3]. En este trabajo se investigan propiedades de las  $mpiL$ -álgebras con primer elemento, o  $mpiL_{n+1}^0$ -álgebras.

Las  $mpiL_{n+1}^0$ -álgebras son modelos algebraicos del cálculo proposicional de Lukasiewicz  $(n+1)$ -valuado monádico, en donde participan como conectivas primitivas la implicación de Lukasiewicz  $\rightarrow$ , las conectivas unarias  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  conocidos como operadores de posibilidad de Moisil, un cuantificador universal  $\forall$  y las constantes 0 y 1. También podemos decir que estas álgebras son polinomialmente equivalentes a la MV-álgebras de orden  $(n+1)$  monádicas estudiadas en [2]

Sobre las  $mpiL_3^0$ -álgebras podemos decir *coinciden* con las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas de L. Monteiro [4] y en el caso  $(n+1)$ -valuado, extienden a las álgebras de Lukasiewicz residuadas de orden  $(n+1)$  (ver [1]). El resultado más destacable de este artículo es la determinación de una fórmula para determinar el cardinal de la  $mpiL_{n+1}^0$ -álgebra libre con un número finito de generadores libres.

### Referencias

- [1] J. Berman and W. Blok, *Free Lukasiewicz and hoop residuation algebras*, Studia Logica, 77 (2004), 153-180.
- [2] A. Di Nola and R. Grigolia. *On monadic MV-algebras*. Ann. Pure Appl. Logic 128, No.1-3, 125-139 (2004).
- [3] A. V. Figallo,  *$I_{n+1}$ -álgebras con operadores*, Doctoral Thesis, Univ. Nac. del Sur, 1989, Bahía Blanca, Argentina.
- [4] L. Monteiro. *Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas*. Notas de Lógica Matemática, 32, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1974.

### AXIOMATIZABILIDAD POR SENTENCIAS DE TIPO (A)(E)!

En este trabajo estudiamos la axiomatizabilidad por sentencias del tipo  $\forall\exists!$  en variedades con discriminador. Más específicamente, estudiamos la relación entre la propiedad 'cerrada bajo intersección de subálgebras' y la axiomatizabilidad por sentencias del tipo mencionado.

Una clase de álgebras  $\mathcal{C}$  se dice *cerrada bajo intersección de subálgebras* si para cualesquiera  $\mathbf{B}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in S(\mathbf{B}) \text{ y } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \text{ implica } \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \in \mathcal{C}.$$

El resultado principal que presentaremos es el siguiente:

**Teorema 1** *Sea  $\mathbf{A}$  un álgebra cuasiprimal sin subálgebras triviales. Entonces son equivalentes:*

- (1) *Toda subclase de  $S(\mathbf{A})$  cerrada bajo intersección de subálgebras es axiomatizable por sentencias  $\forall\exists!$  relativamente a  $S(\mathbf{A})$ .*
- (2) *Las siguientes condiciones valen en  $\mathbf{A}$ .*
  - (2a) *No hay dos subálgebras isomorfas distintas de  $\mathbf{A}$ .*
  - (2b) *Si  $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$  y  $f, g \in \text{Aut}(\mathbf{B})$  son tales que  $f(b) = g(b)$ , para algún  $b \in B$ , entonces  $f = g$ .*

### CONGRUENCIAS DE LAS ÁLGEBRAS DE LUKASIEWICZ $n \times m$ -VALUADAS CON NEGACIÓN MONÁDICAS

Las álgebras de Łukasiewicz  $n \times m$ -valuadas con negación monádicas (o  $MNS_{n \times m}$ -álgebras) fueron introducidas y estudiadas en [2] y [3]. En esta nota, determinamos un teorema de representación para estas álgebras a partir del cual caracterizamos a las  $MNS_{n \times m}$ -congruencias, reencontrando resultados conocidos para las álgebras de Łukasiewicz  $n$ -valuadas monádicas obtenidos en [1].

### Referencias

- [1] A. V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Notes on monadic  $n$ -valued Łukasiewicz algebras*, Math. Bohemica 129, 3(2004), 255-271.
  - [2] C. Sanza, *Álgebras de Łukasiewicz matriciales  $n \times m$ -valuadas con negación monádicas*, Noticiero de la Unión Matemática Argentina 2002, 165.
  - [3] C. Sanza, *On monadic  $n \times m$ -valued Łukasiewicz algebras with negation*. Algebraic and Topological Methods in Non-Classical Logics II. Abstracts, Barcelona, España 2005, 71.
-

### SOBRE UN NUEVO CÁLCULO PROPOSICIONAL

En esta nota presentamos un cálculo proposicional estilo Hilbert en términos de los conectivos  $\{\rightarrow, \wedge, \sim, \nabla\}$ , ciertos esquemas de axiomas y la regla de modus ponens. Hemos probado que las álgebras de De Morgan modales 4-valuadas ([1],[2],[3]) son semánticas algebraicas de este cálculo proposicional. También hemos verificado la completitud de esta lógica respecto de sus modelos semánticos.

### Referencias

- [1] A. V. Figallo, *Tópicos sobre álgebras modales 4-valuadas*, Proceeding of the IX Simposio Latino-Americano de Lógica Matemática, Notas de Lógica Matemática 39 (1992), 145–157.
  - [2] J. M. Font and M. Rius, *A 4-valued modal logic arising from Monteiro's last algebras*, XX International Symposium on Multiple-Valued Logic, 1990.
  - [3] I. Loureiro, *Axiomatisation et propriétés des algèbres modales tétravalentes*, C.R. Acad. Sc. Paris t. 295 (1982), Série I, 555–557.
- 

### ALGEBRAS DE DE MORGAN MODALES PSEUDOCOMPLEMENTADAS CUASIPRIMALES

En esta nota indicamos una descripción del retículo de las congruencias de las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas, o *pm*-álgebras para abreviar (ver [1], [2]) por medio de ciertos subconjuntos del álgebra, diferente a la descrita en [3]. Este nuevo resultado nos ha permitido obtener una función discriminadora ternaria, a partir de la cual comprobamos la cuasiprimalidad de las *pm*-álgebras subdirectamente irreducibles, como así también caracterizar las *pm*-congruencias principales.

### Referencias

- [1] A. V. Figallo and P. Landini, *Notes on 4-valued modal algebras*, Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, U. N. de San Juan, 1, 1(1996), 29–40.
  - [2] A. V. Figallo, N. Oliva and A. Ziliani, *A note on pm-algebras*, Noticiero de la Unión Matemática Argentina, LIV Reunión de Comunicaciones Científicas, (2004), 52.
  - [3] A. V. Figallo, N. Oliva and A. Ziliani, *On the congruences in modal pseudocomplemented De Morgan algebras*. Comunicación aceptada para su presentación en la SLALM 2006.
-

#### UNA DUALIDAD PARA LAS ÁLGEBRAS IMPLICATIVAS MONÁDICAS

En [1] se da una representación topológica de las álgebras implicativas, también llamadas álgebras de Tarski. En este trabajo estudiamos el caso de las álgebras implicativas monádicas, o álgebras de Tarski monádicas. Estas álgebras fueron introducidas originalmente en [2]. Hemos obtenido una representación topológica para las álgebras implicativas monádicas, basada en [1]. Describimos a un álgebra implicativa monádica como una unión de una familia única de filtros monádicos dentro de una adecuada álgebra de Boole monádica. Obtenemos a partir de esta descripción, la noción de espacio topológico implicativo monádico y construimos una equivalencia dual entre la categoría de dichos espacios con morfismos adecuadamente definidos, y la categoría cuyos objetos son las álgebras implicativas monádicas y sus morfismos son los homomorfismos implicativos monádicos.

#### Referencias

- [1] Manuel Abad, J. Patricio Díaz Varela, and Antoni Torrens. Topological representation for implication algebras. *Algebra Universalis*, 52(1):39–48, 2004.
  - [2] L. Iturrioz and A. Monteiro. Representación de álgebras de Tarski monádicas. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 5:361, 1962.
- 

#### OBSERVACIONES SOBRE LA VARIEDAD DE LAS ÁLGEBRAS TERNARIAS

Las álgebras ternarias fueron introducidas por Muller en [5] con el objeto de analizar fenómenos transitorios en circuitos de cambio. Posteriormente, varios autores desarrollaron diversos aspectos de esta variedad de álgebras (ver [1],[2],[3],[4]). En esta nota analizamos el retículo completo de las congruencias de un álgebra ternaria dada, con el objeto de determinar la validez de propiedades importantes en esta variedad.

#### Referencias

- [1] R. Balbes. Free ternary algebras. *International Journal of Algebra and computation*. 10, 6 (2000). 739 - 749.
  - [2] J. A. Brzozowski, J.J. Lou, R. Negulescu. A characterization of Ternary Algebras. University of Waterloo. July 1996.
  - [3] J. A. Brzozowski. Some applications of Ternary Algebras. University of Waterloo. May 1997.
  - [4] C. Gomes, L. Sarmiento, M. Videla. Free ternary algebra over a poset. *Noticiero de la Unión Matemática Argentina*. 2004.
  - [5] D. E. Muller. Treatment of Transition Signals in Electronic Switching Circuits by Algebraic Methods. *IRE Trans. on Electronic Computers*, vol. EC-8, n° 3, p. 401. 1959.
-

**Autores: Ignacio Viglizzo**  
**Lugar: Universidad Nacional del Sur**

---

#### COÁLGEBRAS EN ESPACIOS MEDIBLES

Dado un endofunctor  $T$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , una  $T$ -coálgebra es un objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  junto con un morfismo  $c : X \rightarrow T(X)$ . La teoría de coálgebras abstrae características comunes de diferentes áreas como semántica de lenguajes de programación, lógica modal, autómatas y conjuntos no bien fundados. La mayor parte del trabajo realizado en ejemplos concretos ha estado limitado a la categoría **Set** de conjuntos. En este trabajo se ha desarrollado la teoría para la categoría **Meas** de espacios y funciones medibles.

Las coálgebras sobre espacios medibles son de interés como una formalización de cadenas de Markov y pueden ser también usados para modelar el razonamiento probabilístico. Discutimos algunos hechos relacionados con el funtor más interesante en **Meas**,  $\Delta$ , que asigna a cada espacio medible el espacio de todas las medidas de probabilidad sobre él. El resultado principal es la construcción de coálgebras finales para muchos funtores interesantes en **Meas**. La primera construcción (trabajo conjunto con L. Moss) está basada en un lenguaje que nos permite construir fórmulas que describen los elementos de la coálgebra final. El segundo método hace uso de la secuencia  $1 \leftarrow T1 \leftarrow T^2 1 \leftarrow \dots$  obtenida aplicando iteradamente el funtor  $T$  al objeto final  $1$  de la categoría.

Como aplicación mostraremos cómo construir *espacios de tipos universales*, objetos de interés en la teoría de juegos y economía.

---

**Autores: J.L. Castiglioni, M. Menni, M. Sagastume**  
**Lugar: Universidad Nacional de La Plata**

---

#### OBSERVACIONES SOBRE LA ADJUNCIÓN DE KALMAN

La adjunción original de Kalman, dada por los funtores  $K$  y  $L$ , es una equivalencia si se cumple una condición más llamada (CK). Se observa que, para un reticulado  $R$ ,  $K(R)$  es la mayor subálgebra de De Morgan con centro  $(0,0)$  del producto de  $R$  por su dual y que un álgebra de De Morgan con único centro es un álgebra de Kleene. Para un álgebra de Kleene con centro  $M$ , los reticulados de congruencias  $\text{Con}(M)$  y  $\text{Con}(L(M))$  son isomorfos. Lo mismo ocurre para un reticulado  $R$  con los reticulados  $\text{Con}(R)$  y  $\text{Con}(K(R))$ .

Se estudian casos particulares, como los de las BCK-álgebras y BCK-álgebras conmutativas, y de éstas dos subcategorías importantes: BCK-álgebras cónicas y BCK-álgebras conmutativas acotadas, que Mundici (referencia 3) probó que son definicionalmente equivalentes a las MV-álgebras.

Se demostró la equivalencia categorial de las BCK-álgebras cónicas con los  $l$ -grupos y de las BCK-álgebras conmutativas acotadas con las MV\*-álgebras.

1)Cignoli, R., *The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras*, Algebra Universalis, **23** (1986), 262-292.

2)Iseki, K. and Tanaka, S., *An introduction to the theory of BCK-algebras*, Math. Japon, **23** (1978), 1-26.

3)Kalman, J. *Lattices with involution*, Trans. Amer. Math. Soc., **87** (1958), 485-491.

4)Mundici, D., *MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras*, Math. Japonica **31**, N° 6 (1986), 889-894.

---

**Autores: María Jimenez y A. V. Figallo**

**Lugar: Universidad Nacional de San Juan. Universidad Nacional del Sur**

---

### M3-RETÍCULOS CON UN CUANTIFICADOR

En este trabajo introducimos los  $M_3$ -retículos con un cuantificador, como un par  $(L, \exists)$  donde  $L$  es un  $M_3$ -retículo (ver [?]) y  $\exists$  es un operador unario sobre  $L$ , llamado cuantificador, que satisface las siguientes propiedades:

- $\exists 0 = 0$ ,
- $x \leq \exists x$ ,
- $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$
- $\exists(x \wedge y) = \exists x \wedge \exists y$ ,
- $\exists \exists x = \exists x$
- $\exists \Delta x = \Delta \exists x$ ,
- $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$ .

En esta nota obtenemos varios resultados sobre esta variedad de álgebra, en particular describimos una dualidad topológica que extiende a la indicada en [2] para los  $M_3$ -Retículos.

### Referencias

- [1] A. V. Figallo. Los  $M_3$ -Reticulados. Rev. Colombiana de Matemática, 21 (1987), 95-106.
  - [2] M. A. Jiménez. Dualidad de Priestley para los  $M_3$ -Retículos. Actas del VII Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro. Vol 1, 22, 2003.
- 

**Autores: Matias Menni**

**Lugar: Conicet - Universidad Nacional de La Plata**

---

### EL TEOREMA DE COMPLETITUD DE LAÜCHLI

En su trabajo [2] Läuchli demostró un teorema de completitud para el cálculo de predicados intuicionista. La demostración se basa en noción abstracta de "realizability" sobre conjuntos equipados con una permutación. Lawvere observó que el resultado de Läuchli puede verse como un resultado de completitud de la hiperdoctrina inducida por la indexación canónica del topos de permutaciones. Esta observación fue explotada en [4] y [1] y las demostraciones allí obtenidas aclaran mucho el resultado de Läuchli. (La completitud aparece como corolario de un teorema de representación de hiperdoctrinas.) Por otro lado, todas las demostraciones mencionadas desaprovechan la rica estructura de las categorías subyacentes. En este trabajo demostramos el teorema de Läuchli utilizando la teoría de topos. De esta manera, la completitud aparece como corolario del hecho de que cierto morfismo geométrico es una suryección abierta.

- [1] A. Kock. On a theorem of Läuchli concerning proof bundles. Unpublished.
  - [2] H. Läuchli. An abstract notion of realizability for which intuitionistic predicate calculus is complete. In A. Kino, J. Myhill, and R. E. Vesley, editors, Intuitionism and proof theory, pages 227-234. North Holland, 1970.
  - [3] F. W. Lawvere. Adjoints in and among bicategories. In Logic and algebra, Lecture notes in pure and applied algebra, vol. 180. Marcel Dekker, 1996.
  - [4] M. Makkai. The fibrational formulation of intuitionistic predicate logic I: completeness according to Gödel, Kripke and Läuchli. Parts 1 & 2. Notre Dame Journal of formal logic, 34(3 & 4 resp.), 1993.
-

**Autores:** Víctor Leandro Fernández; Marcelo Esteban Coniglio  
**Lugar:** Instituto de Ciencias Básicas, U. N. de San Juan; Centro de Lógica,  
Epistemología e História da Ciência, U. Estadual de Campinas

---

COMBINACIÓN DE SEMÁNTICAS MATRICIALES Y ALGEBRAICAS MEDIANTE TEORÍA  
DE CATEGORÍAS

Uno de los principales mecanismos de combinaciones entre lógicas es conocido como "Fibrilación de lógicas". Este proceso ha sido formalizado mediante Teoría de Categorías por diversos autores, al definir lo que será denominado aquí "fibrilación categorial" o "C-fibrilación". En este enfoque, las combinaciones de lógicas son entendidas como diagramas categoriales especiales, tales como coproductos o elevaciones cocartesianas. Aplicando C-fibrilación, los autores de esta comunicación han estudiado combinaciones de lógicas con ciertas propiedades algebraicas (ver [1] y [2]). De esta manera puede probarse que, bajo ciertas restricciones, es posible combinar lógicas protoalgebraicas, equivalenciales y algebrizables, por ejemplo.

El presente trabajo pretende adaptar tales combinaciones de lógicas a la *combinación de las estructuras semánticas asociadas a ellas*. Para ello, se definen: la categoría de clases de matrices (y, dentro de ella, la de fibrados de Lindenbaum), así como la categoría de semánticas algebraicas equivalentes. Mediante ciertos teoremas de isomorfismo se muestra que tales categorías admiten coproductos y elevaciones cocartesianas, lo que indica que las semánticas matriciales y algebraicas pueden combinarse para obtener nuevos objetos. Finalmente, veremos que tal proceso puede formalizarse mediante combinación de los axiomas de la lógica de primer orden que definen las semánticas estudiadas.

**Referencias**

- [1] V. L. Fernández. *Fibrilação de lógicas na Hierarquia de Leibniz*. Tesis Doctoral. IFCH-UNICAMP, Brasil. 2005.  
[2] V. L. Fernández; M. E. Coniglio. Fibring Algebraizable Consequence Systems. *Proceedings of CombLog'04*. IST-Lisboa. págs: 93--98. 2004.
- 

**Autores:** Daniela Montangie  
**Lugar:** Universidad Nacional del Comahue

---

SUBVARIEDADES DE  $V(B_k)$

Sea  $\mathcal{TC}$  la clase de álgebras  $\langle A; \rightarrow, g, h, 1 \rangle$ , donde  $\langle A; \rightarrow, 1 \rangle$  es un álgebra de Tarski y  $g$  es un automorfismo de  $A$ , con inverso  $h$ . Esta clase de álgebras forman la variedad de las álgebras de Tarski cíclicas. Si  $B_k$  es el álgebra de Boole finita con  $k$  átomos y  $g$  el automorfismo de  $B_k$  que los permuta cíclicamente, entonces  $\langle B_k; g, h = g^{-1} \rangle \in \mathcal{TC}$  y verifica  $g^k x = x$  para todo  $x \in B_k$ . La clase de álgebras de  $\mathcal{TC}$  que verifica la ecuación  $g^k x \simeq x$  es una variedad generada por  $B_k$  a cuyos elementos llamaremos álgebras de Tarski  $k$ -cíclicas.

En [2] se prueba que toda álgebra simple de  $V(B_k)$  es isomorfa a una subálgebra creciente no trivial de  $B_d$ , para  $d$  divisor de  $k$ .

Expondremos en este trabajo resultados sobre el conjunto ordenado de órbitas que determina  $g$  en  $B_k$ . En particular se da una fórmula para su número de elementos.

Mostramos cómo se relacionan las órbitas de  $B_k$  con las subvariedades de  $V(B_k)$ : probamos que existe una correspondencia biyectiva entre órbitas y ciertas clases de ecuaciones distinguidas, y conjeturamos que toda subvariedad de  $B_k$  está caracterizada por un conjunto de estas ecuaciones distinguidas lo que nos permitirá hallar el reticulado de subvariedades de  $V(B_k)$ .

Se muestran las ecuaciones que caracterizan a los conjuntos crecientes generados por los niveles de  $B_k$ .

**Referencias**

- [1] A. Monteiro, *Algèbres de Boole Cycliques*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, XXIII, 1 (1978), pp.71-76.  
[2] M. Zander, *Subvariedades de Algebras Temporales*, Tesis Doctoral, Depto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 2004.
-

LÓGICAS CON IMPLICACIÓN Y FUSIÓN. SEMÁNTICAS ALGEBRÁICAS LOCALES Y GLOBALES

En este trabajo estudiamos las extensiones axiomáticas de una lógica sentencial finitaria, denotada  $\mathbb{SFI}$ , en el lenguaje  $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \circ, \rightarrow, \perp, \top\}$ . Esta lógica generaliza a la mayoría de las Lógicas Multivaluadas [3] y Relevantes. La lógica  $\mathbb{SFI}$  está definida desde tres ángulos diferentes: mediante una semántica de marcos ternarios, por una semántica algebraica basada en las **DLEFI**-álgebras [1], y por medio de un Sistema de Gentzen.

Probamos que las extensiones axiomáticas estudiadas son canónicas, dando condiciones de primer orden en los marcos ternarios para la validez de secuentes y reglas, semejantes a las dadas en [2]. A su vez vemos que ciertas familias de marcos caracterizables mediante reglas, no son caracterizables mediante secuentes.

Probamos que, en ciertos casos, el concepto de deducción local y global de la semántica ternaria están relacionadas con los filtros de retículo y los filtros implicativos de las álgebras correspondientes. Esta relación nos permite introducir una noción algebraica de deducción local y global. Veremos que la lógica de Łukasiewicz  $\mathbf{L}_\infty$  y la lógica  $\mathbf{L}_\infty^\wedge$  (ver [4]) son la deducción global y local respectivamente, de las álgebras de Wasjberg.

## Referencias

- [1] S.A. CELANI, *Distributive lattices with fusion and implication*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 28 (2004), 999-1010.
  - [2] L.M. CABRER AND S.A. CELANI. *Priestley Dualities for some Lattice-Ordered Algebraic Structures, including  $\mathbf{MTL}$ ,  $\mathbf{IMTL}$  and  $\mathbf{MV}$ -algebras*. To appear in Central European Journal of Mathematics.
  - [3] R. CIGNOLI, F. ESTEBA, L. GODO AND F. MONTAGNA, *On a class of left continuous  $t$ -norms*. Fuzzy Sets and Systems 131 (2002), 283-296.
  - [4] J. M. FONT, À. J. GIL, A. TORRENS AND V. VERDÚ. *On the infinite-valued Łukasiewicz logic that preserves degrees of truth*. To appear in Archive for Mathematical Logic.
-



ECUACIONES RECURSIVAS EN ÓRDENES PARCIALES COMPLETOS DE CONJUNTOS

Diremos que la operación binaria  $*$  entre conjuntos es *apropiada* si distribuye a izquierda y a derecha con respecto a uniones crecientes numerables, i.e.  $(\cup_{n \geq 0} A_n) * B = \cup_{n \geq 0} (A_n * B)$  y  $B * (\cup_{n \geq 0} A_n) = \cup_{n \geq 0} (B * A_n)$  para todo conjunto  $B$  y toda secuencia de conjuntos  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  (en particular es monótona creciente respecto de la inclusión en ambos argumentos). Ejemplos de operaciones apropiadas son unión ( $\cup$ ), intersección ( $\cap$ ), producto cartesiano ( $\times$ ), unión disjunta y proyecciones.

Sea  $\{*_j\}_{j \in J}$  una familia de operaciones apropiadas, una de las cuales es  $\cup$ , y consideremos  $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in K}$  una familia de conjuntos "básicos". Entonces el conjunto  $X$  construido como sigue resulta cerrado por las operaciones  $*_j$  y un *orden parcial completo* (cpo), i.e.  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$  con los  $A_i \in X$  implica  $\cup_{i \geq 0} A_i \in X$ .

Sean  $X_0 = \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ ,  $X_{n+1} = \{A *_j B \mid A, B \in X_n, j \in J\}$ , para  $n \geq 0$ . (Observar que  $X_n \subseteq X_{n+1}$  por la idempotencia de  $\cup$ .) Sea  $X' = \cup_{n \geq 0} X_n$  y sea  $X = \{\cup_{i \geq 0} A_i \mid A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \text{ con } A_i \in X' \text{ para } i \geq 0\}$ .

Tiene sentido entonces la definición:  $F : X \rightarrow X$  es *continua* si  $F(\cup_{i \geq 0} A_i) = \cup_{i \geq 0} F(A_i)$  para toda secuencia  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$  de elementos de  $X$ .

Como  $X$  es un cpo con mínimo, vale entonces el primer teorema de recursión de Kleene: si  $F : X \rightarrow X$  es continua entonces  $F$  tiene un punto fijo mínimo (respecto de la inclusión). Vale también el segundo teorema de recursión de Kleene: si la expresión  $F(T)$  es de longitud finita y se describe a lo sumo con conjuntos fijos, operaciones apropiadas y  $T$ , entonces  $F$  es continua. De ambos resultados sigue que toda ecuación de conjuntos de la forma  $T = F(T)$ , donde  $F(T)$  satisface lo anterior, admite una solución mínima (el *tipo denotado*). Por ej., utilizando los conjuntos básicos  $\mathbb{Z}$  y  $\{\square\}$  (con  $\square \notin \mathbb{Z}$ ) y las operaciones  $\cup$  y  $\times$ , la ecuación  $T = \{\square\} \cup (\mathbb{Z} \times T)$  denota *listas de números enteros*, la ecuación  $T = \mathbb{Z} \cup (T \times T)$  denota *árboles binarios no vacíos de números enteros*, y la ecuación  $T = \mathbb{Z} \times T$  denota el vacío.

---

SOBRE UNA SUBCLASE DE LAS ÁLGEBRAS DE ŁUKASIEWICZ-MOISIL  
THETA-VALUADAS SIN NEGACIÓN

Es un hecho bien conocido que la clase de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil  $\theta$ -valuadas sin negación (Lk $_{\theta}$ -álgebras para abreviar) no constituyen una variedad y que las únicas Lk $_{\theta}$ -álgebras subdirectamente irreducibles son las subálgebras de  $B_2^{[1]}$  ([1],[2]). En esta nota investigamos la clase Lk $_{\theta, \text{Fin}}$  de las Lk $_{\theta}$ -álgebras que son subálgebras de productos subdirectos finitos de  $B_2^{[1]}$ . En particular probamos que se trata de una variedad y también obtenemos resultados de interés sobre las congruencias de estas álgebras.

## Referencias

- [1] C. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz-Moisil Algebras*, North-Holland, 1991.
  - [2] A. V. Figallo, Inés B Pascual, Alicia Ziliani.  $\theta$ -valued Łukasiewicz-Moisil Algebras without negation. Noticiero de la Unión Matemática Argentina. LIV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas.
-

SOBRE ÁLGEBRAS DE OCKHAM - NELSON ESPECIALES

En [3], Figallo introdujo los  $N$ -reticulados generalizados (o **NLg**) como una extensión de los  $N$ -reticulados de Rasiowa (o **NL**) ([7]) o de las álgebras de Nelson en la terminología de A. Monteiro ([2]). En la definición dada en [3] simplemente se elimina la ley de Kleene  $(x \wedge \sim x) \vee (y \vee \sim y) = y \vee \sim y$  incluida en la versión ecuacional indicada en [2]. Figallo, también definió a los **NLg** deductivamente semisimples como aquellos que verifican la propiedad adicional siguiente: **(Pf)**  $x = (x \rightarrow y) \rightarrow x$ .

En [6], Monteiro probó que en **NL** se verifica la propiedad  $(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) \leq (x \vee y) \rightarrow z$ . En esta nota, en primer lugar llamamos álgebras De Morgan Nelson (**DNA**) a los **NLg** motivados por el hecho que Vakarelov en [8] introdujo otro concepto bajo el nombre de álgebras de Nelson generalizadas. Posteriormente, probamos que en **NLg** la identidad **(Pf)** es equivalente a la identidad, en principio más débil, conocida con el nombre de *Ley de Pierce*: **(Pd)**  $((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x = 1$ . La importancia de **(Pd)** fue puesta de manifiesto por Monteiro en [5].

En segundo lugar, demostramos que en **NLg** la identidad  $(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) = (x \vee y) \rightarrow z$ , es equivalente a la ley de Kleene, de donde resulta que es posible indicar una nueva axiomática para **NL** en la que la ley de Kleene puede ser reemplazada por una identidad, que no contiene la operación  $\sim$  de negación. Finalmente, iniciamos el estudio de la variedad de álgebras que hemos denominado *álgebras de Kleene-Nelson*. Las mismas constituyen la subvariedad de las de Ockham-Nelson (ver [4]) que satisfacen como identidad adicional la ley de Kleene.

## Referencias

- [1] R. Cignoli. The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras. *Algebra Universalis*, 23, 3(1986), 262–292.
- [2] D. Brignole et A. Monteiro. Caracterisation des algèbres de Nelson par des equalites. *Proc. of the Japan Acad.* 43, 4(1967), 279–285.
- [3] A. V. Figallo. Generalized  $N$ -Lattices. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 35(1989), 61–65.
- [4] A. V. Figallo, P. Landini, A. Ziliani. Ockham-Nelson algebras with a quantifier (abstract). *Algebraic and Topological Methods in Non-Classical Logics II*. Barcelona. 2005.
- [5] A. Monteiro. Sur les algèbres de Heyting simetriques. *Portugaliae Math.*, 39, 1–4(1980), 1–237.
- [6] A. Monteiro. Les éléments régulier d'un  $N$ -lattice. *Les  $N$ -lattices linéaires*. Textos e Notas 15, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais das Universidades de Lisboa. Portugal. 1978.
- [7] H. Rasiowa.  $N$ -Lattices and constructive logic with strong negation. *Fundamenta Mathematicae*, 46 (1958), 61–80.
- [8] D. Vakarelov. Nelson's negation on the base of weaker versions of intuitionistic negation. *Studia Logica*, 80, 2-3 (2005), 393–430

## DECOMPOSABILITY FOR FREE LUKASIEWICZ IMPLICATION ALGEBRAS

Lukasiewicz implication algebras are  $\{\rightarrow, 1\}$ -subreducts of Wajsberg algebras (MV-algebras). They are the algebraic counterpart of Super-Lukasiewicz Implicational logics investigated in Kommori. The aim of this paper is to study the direct decomposability of free Lukasiewicz implication algebras. We show that freely generated algebras are directly indecomposable. We also study the direct decomposability in free algebras of all its proper subvarieties and show that infinitely freely generated algebras are indecomposable, while finitely free generated algebras can be only decomposed into a direct product of two factors, one of which is the two-element implication algebra.

---

**Autores: Galli, Adriana-Ertola, Rodolfo-Sagastume, Marta**  
**Lugar: Fac. de Cs. Exactas y FAHCE- UNLP**

---

#### EL ANTICIPADOR EN LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING GENERALIZADAS

Estudiamos las álgebras de Heyting generalizadas donde existe un operador unario llamado anticipador, que permite definir al sucesor, operador ya conocido. Demostramos que el anticipador es una generalización del mínimo denso, tiene definición ecuacional, pero

no es compatible en el sentido Caicedo-Cignoli [1].

En relación con la lógica intuicionista, probamos que la extensión por medio del conectivo correspondiente es correcta y conservadora.

Consideramos además conectivos relacionados.

[1] Caicedo, X.- Cignoli, R.. *The Journal of Symbolic Logic*.  
(1620-1636) Vol. 66, Number 4. Dec. 2001.

---

**Autores:** Juan Miguel Medina y Bruno Cernuschi Frías  
**Lugar:** Universidad de Buenos Aires/CONICET

---

## RANDOM SERIES IN $L^p(X, \Sigma, \mu)$ USING UNCONDITIONAL BASIC SEQUENCES AND $l^p$ STABLE SEQUENCES: A RESULT ON ALMOST SURE ALMOST EVERYWHERE CONVERGENCE

### 1. INTRODUCTION

In many circumstances it is hard to find a mathematical object with some prescribed properties, or to prove that a certain family of objects verifies a given property, but it is pretty easy to exhibit random objects which enjoy these properties almost surely. Unconditional basic sequences are very important in the theory of Banach spaces. Another concept which is related with them is  $l^p$  stability and both are important topics in wavelet analysis, shift invariant subspaces and sampling. It is also interesting to study the pointwise, almost everywhere convergence properties of these expansions. Here, we will consider random series of the form

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i,$$

where the  $a_i$ 's are independent centered random variables and the  $f_i$ 's are an unconditional basic sequence or an  $l^p$  stable sequence in a Lebesgue space  $L^p(X, \Sigma, \mu)$ , where  $p$  is not necessarily equal to 2. The main goal of this work is to show that *if one of these series converges in the norm topology almost surely then it converges almost everywhere almost surely*. Additionally, as a consequence of all this, we obtain the following interesting result which can be described as follows:

**Theorem 1.1.** *Let  $f \in \text{Span}\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(X, \Sigma, \mu)$  with  $(X, \Sigma, \mu)$   $\sigma$ -finite,  $\{\theta_j\}_j$  a sequence of i.i.d. r.v.'s taking values in  $\{+1, -1\}$  with equal probability, and  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  an unconditional basic ( $l^p$  stable) sequence, if  $f = \sum_i a_i f_i$  is the expansion of  $f$  in this basis then the random series  $\sum_i \theta_i a_i f_i$  converges a.e.  $[\mu]$  a.s.*

---

**Autores:** María del Carmen Varaldo, Graciela Leonor Nasini, María Susana Montelar  
**Lugar:** Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

---

## REPARTO DE COSTOS EN UN ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMO: UNA REGLA POLINOMIAL

En el contexto del *Problema de Asignación de Costos en un Árbol Mínimo*, Bergantiños y Vidal-Puga definen, en *A fair rule in minimum cost spanning tree problems* (2005), la regla de reparto de costos que más propiedades de "justicia" verifica entre las propuestas en la literatura específica. Sin embargo, de acuerdo a su definición, el cálculo de estos costos sería muy complejo, en tanto involucra todas las permutaciones entre los agentes.

En este trabajo presentamos una regla de asignación de costos basada en la reducción del problema original a instancias más pequeñas y con una estructura particular sobre las cuales se aplica una fórmula cerrada para el cálculo del costo asignado a cada agente. Tanto las reducciones como el cálculo son realizables en tiempo polinomial. Probamos, además, que esta regla coincide con la regla definida por Bergantiños y Vidal-Puga.

---

**Autores: Fabio Marcela - Serrano Eduardo**  
**Lugar: DM UBA - ECyT - UNSAM**

---

FILTRADO DE IMÁGENES EN EL DOMINIO DE FOURIER MEDIANTE UN ESQUEMA DE  
LITTLEWOOD-PALEY SEPARABLE.

Recientes trabajos (R. Ashino, C. Heil, R. Villancourt y otros) proponen esquemas de filtrado de imágenes basado en un análisis micro-local bidimensional.

El mismo opera mediante el diseño de apropiadas máscaras definidas sobre un embañosado del dominio bidimensional de Fourier. Tales máscaras, se definen a partir del análisis del espectro de potencia de la transformada de la imagen, lo que permite distinguir zonas regulares o singulares.

La implementación de esta técnica supone el empleo de apropiadas wavelets complejas, bien localizadas en frecuencia. Los autores originalmente proponen emplear la anti-transformada de las características de los cubos que conforman el embañosado. Claramente, esto representa una deficiente localización en el dominio espacial. Por esta razón se proponen en otros trabajos diversas alternativas de bases ortonormales o frames.

En esta presentación exhibimos un esquema basado en el empleo de wavelets de soporte compacto, oscilantes y bien localizadas en frecuencia, del tipo de Littlewood-Paley separables. Las mismas convolucionan con la imagen dada de modo que su transformada de Fourier se descompone sobre una partición en el dominio frecuencial. Esto posibilita el diseño de máscaras y de una metodología de procesamiento análoga a la anterior.

La operación de convolución se calcula operando con las transformadas discretas de Fourier. Se exponen algunos aspectos acerca de la implementación numérica del esquema.

---

**Autores: Torres, Germán Ariel**  
**Lugar: Facultad de Matemática, Astronomía y Física - UNC**

---

ALGORITMOS DE FILTRADO PARA PROBLEMAS DE GRAN ESCALA

La asimilación de datos es el proceso permanente de alimentar un modelo de predicción parcialmente desconocido con información disponible proveniente de observaciones con el objeto de corregir y mejorar los resultados modelados. Una de las herramientas matemáticas más significativas para realizar una asimilación es el filtro de Kalman. El filtro de Kalman es esencialmente un conjunto de ecuaciones de tipo predictor-corrector que es óptimo en el sentido que minimiza la traza de la matriz de covarianza de los errores. Existen diferentes versiones del filtro de Kalman que dependen del tipo de aplicación y la complejidad. Las versiones más comunes son: Extended Kalman Filter (EKF), Ensemble Kalman Filter (EnKF) y sus versiones de rango reducido. Estas últimas versiones cuentan con simplificaciones sobre el tamaño de las matrices que se utilizan para problemas de gran escala ( $\sim 10^6$  variables). Estos filtros ya han sido aplicados a diferentes modelos, y en cada uno de los casos se ha notado que la mayor dificultad no proviene del algoritmo sino del código del modelo original, que debe tener cierta estructura para que el filtro pueda ser implementado. Esto ha provocado que los algoritmos de filtrado dependan estrechamente del modelo donde son aplicados, sin contar que también la versión del filtro depende de las variables que se pretende asimilar. En este trabajo se presenta un toolbox sobre filtros de Kalman adaptado a problemas de gran escala que incluye varias versiones del filtro, desarrollado de manera completamente modular, independientemente del modelo donde se aplicará. Se desarrollan ejemplos de uso, problemas test, y comparaciones.

---

**Autores: Patricia Galdeano**  
**Lugar: San Luis**

---

#### MODELOS MATEMÁTICOS CON DE TRANSFERENCIA DE INFORMACIÓN

En este trabajo se estudia un problema de decisión sobre el valor de la información en un modelo cooperativo. Hay un agente (el innovador), que tiene información relevante que pueda vender a algunos compradores potenciales (los usuarios). Estos potenciales usuarios comparten un mercado. La utilidad prevista de cada uno de ellos puede ser mejorada obteniendo la información. La situación entera se modela como un juego cooperativo de  $(n + 1)$  persona.

Se estudia las propiedades de la función característica de este juego. La cual satisface una versión débil de superaditividad, a saber  $0 - monotónica$ . El juego se demuestra ser monotónico.

Se computamos el valor de Shapley y se prueba que es una imputación para el juego. También se compara el valor de Shapley con los resultados obtenidos en un acercamiento no cooperativo dado por Quintas (1995). También se estudian los casos límite cuando los compradores potenciales están totalmente informados o mal informados; que incluye los juegos del Big Boss Games (Muto y otros (1988)) y otros casos límite. Se concluye que en un ambiente cooperativo los compradores evitan de ser explotada por el innovador. El innovador obtiene inversamente una utilidad más alta en un juego no cooperativo.

---

**Autores: Delfina Femenia**  
**Lugar: San Juan (UNSJ)**

---

#### EL CORE EN UN MODELO DE MATCHING CON RESTRICCIÓN DE CUOTA

En este trabajo se estudia el Core en un modelo de asignación especial, en el cual intervienen dos tipo de agentes complementarios (trabajadores del tipo I y trabajadores del tipo II) y una institución, la cual tiene preferencias sobre los posibles matching (asignaciones). Esta institución tiene para contratar un conjunto de pares de trabajadores complementarios, y tiene una cuota  $q$  que es el número máximo de pares de candidatos permitidos para contratar.

En este modelo se extiende, en un camino natural, el concepto de bloqueo de coalición y se obtiene una caracterización completa del Core, bajo la restricción *responsive* de las preferencias de la institución.

---

**Autores: Mabel Marí**  
**Lugar: San Juan (UNSJ)**

---

VACANTES Y EQUILIBRIO EN UN MODELO DE MATCHING CON RESTRICCIÓN DE CUOTA.

Estudio como varían los conjuntos estables cuando se modifica la cuota  $q$  en un modelo de asignación especial, donde intervienen dos tipos de agentes complementarios y una institución que tiene una relación de preferencias sobre los posibles matchings, ésta tiene un número limitado de vacantes (cuota  $q$ ) que es la cantidad máxima de pares de candidatos permitidos para contratar. Las soluciones estables son aquellas que sobreviven a bloqueos de los dos tipos de agentes y de la institución.

---

**Autores: María Beatriz Pintarelli y Fernando Vericat**  
**Lugar: GAMEFI (Fac. Ingeniería -UNLP)**

---

PROBLEMA DE MOMENTOS CON ERROR Y MOMENTOS FRACCIONALES

Es conocido el uso de momentos fraccionales para recobrar la función de densidad en el problema de momentos de Hausdorff cuando un gran número de momentos (o todos ellos) es conocido, obteniéndose de esta manera un método más eficiente. También es sabido que debido al mal condicionamiento del problema de Hausdorff, un pequeño error adicional en los datos lleva a una mala aproximación de la solución. En este trabajo estudiamos la aplicación de momentos fraccionales para lograr una mejor aproximación a la solución cuando los momentos dados tienen un error adicional.

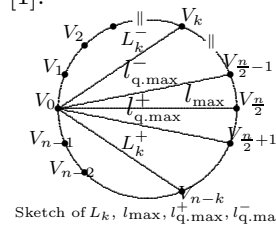
---

CARACTERIZACIÓN DE CICLOS Y CAMINOS HAMILTONIANOS ÓPTIMOS EN REDES CON NODOS EN LAS RAÍCES DE LA UNIDAD

Consideremos las redes  $\mathcal{N}(K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ , donde  $K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1})$  es un grafo completo con vértices en las  $2p+2$  raíces de la unidad y  $D$  es la matriz de las distancias euclídeas entre nodos. En tal espacio cada una de las sucesiones  $T_k$ , de lados

$$T_k : \underbrace{L_k^-, \underbrace{l_{q,\max}^-, \dots, l_{q,\max}^-}_{k-1}, l_{\max}, \underbrace{l_{q,\max}^+, \dots, l_{q,\max}^+}_k}_{2k+1}, \underbrace{l_{\max}, l_{q,\max}^+, l_{\max}, \dots, l_{q,\max}^+, l_{\max}}_{\left(\frac{n}{2}-k\right)l_{\max} \text{ y } \left(\frac{n}{2}-k-1\right)l_{q,\max}^+}$$

determina una trayectoria hamiltoniana euclídea cíclica, de orden  $n$ , que pasa por las  $n$ -raíces de la unidad. Tales configuraciones resuelven los problemas de caminos y ciclos más largos en  $\mathcal{N}(K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$  [1].



En este trabajo, se caracterizan todas las trayectorias que resuelven ambos problemas.

[1] Niel, B. I. "Geometry of the euclidean hamiltonian suboptimal and optimal paths in the  $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ 's networks ". Proceedings of the VIII "Dr. Antonio A. R. Monteiro ", May 2005, U.N.S. In print.



BASES DE GROEBNER EN EL MODELO CINEMÁTICO INVERSO DE MANIPULADORES ROBÓTICOS

Muchos problemas en sistemas mecánicos pueden traducirse a un conjunto de ecuaciones polinómicas. La geometría algebraica estudia tales ecuaciones y en las últimas décadas, ha tenido gran desarrollo a través de la implementación de algoritmos computacionales para la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales. De manera tal que es posible hallar la solución a problemas que anteriormente eran inmanejables. Un ejemplo de ello se presenta en este trabajo, utilizando el algoritmo algebraico de las bases de Groebner para obtener en forma analítica, el modelo cinemático inverso de dos manipuladores robóticos: el robot Rhino XR-3 de fines educativos y el robot industrial IRB 140.

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados formados por eslabones conectados entre sí a través de articulaciones. Resulta de interés especificar la posición y orientación del dispositivo terminal o herramienta del robot, puesto que es quien realiza la tarea encomendada. El modelo cinemático directo determina la posición de la herramienta en el espacio cartesiano, dado un vector de posiciones en el espacio de las articulaciones. Su obtención, aunque laboriosa, es metódica e involucra sencillas expresiones trigonométricas. Mientras que, el modelo cinemático inverso consiste en la relación inversa. Este modelo es de interés ya que muchas tareas de manipulación son naturalmente formuladas a partir de la posición y orientación deseada para la herramienta.

Generalmente, obtener el modelo cinemático inverso involucra resolver ecuaciones muy acopladas, trigonométricas y con múltiples o ninguna solución. Su resolución puede ser en forma numérica o analítica. En este trabajo se explora el camino de la solución analítica, se transforman las ecuaciones trigonométricas en ecuaciones polinómicas y se utiliza el método de las Bases de Groebner para resolver el modelo cinemático inverso en los dos robots mencionados.

---

**Autores: Patricia Mariela Morillas**

**Lugar: Instituto de Matemática Aplicada San Luis (UNSL-CONICET)**

---

UN MÉTODO ITERATIVO PARA CALCULAR LA SOLUCIÓN DE NORMA MÍNIMA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dada una matriz real  $A$  de  $m \times n$  con  $m \leq n$  y  $\text{rango}(A) = m$ ,  $x \in R^n$  y  $b \in R^m$ , se considera el problema  $\min \|x\|_2$  sujeto a  $Ax = b$  (1)

Si se toma como aproximación inicial un  $x_0 \in R(A^T)$ , el método de Kaczmarz [1] [2] permite encontrar en forma aproximada la solución del problema (1). Un paso típico del método de Kaczmarz puede ser descripto como sigue:

$$x_{k+1} = x_k + w_k(P_{i_k}x_k - x_k) \quad (2)$$

donde  $P_{i_k}$  es la proyección ortogonal sobre el hiperplano  $H_{i_k} = \{x \in R^n : \langle a_{i_k}, x \rangle = b_{i_k}\}$ ,  $0 < e \leq w_k \leq 2 - e < 2$ ,  $i_k \in \{1, \dots, m\}$ . El vector  $x_{k+1}$  se ubica sobre la recta que pasa por  $x_k$  y es perpendicular a  $H_{i_k}$ . En particular si en (2)  $w_k = 1$ ,  $x_{k+1}$  se reduce a la proyección de  $x_k$  sobre  $H_{i_k}$ .

En este trabajo se propone una variación del método de Kaczmarz que consiste en calcular  $x_{k+1}$  usando (2) si se verifica determinada condición, en caso contrario  $x_{k+1}$  es un punto de  $H_{i_k}$  que se ubica sobre una recta que pasa por  $x_k$  y es paralela a  $H_{i_{k+1}}$ . Se estudia la convergencia del método propuesto y se analiza su comportamiento, mediante experimentos numéricos, comparándolo con el método de Kaczmarz original y con algunas de sus variantes. Los resultados obtenidos en estos experimentos nos muestran que el método propuesto se comporta especialmente mejor que el resto cuando las filas de  $A$  son casi paralelas.

**Referencias**

- [1] Kaczmarz S., Bull. Internat. Acad. Pol. Sci. Lett. A 35, 355-357, (1937).
  - [2] Censor Y., SIAM Review 23 (2), 444-466, (1981).
- 

**Autores: María Edith Di Genaro y Jorge Oviedo**

**Lugar: San Luis**

---

UN ALGORITMO PARA CONSTRUIR TODOS LOS MATCHING ESTABLES DEL MODELO UNO A UNO

En este trabajo se propone un algoritmo para construir el conjunto de matching estables. Un modelo de matching esta compuesto por dos conjuntos de agentes disjuntos  $M$  y  $W$ . Cada agente tiene un orden de preferencia sobre el otro conjunto. Un matching es una asignación entre los agentes de  $M$  y  $W$  y es estable si no hay un par de agentes que se prefieran a la asignación dada por el matching. Se conoce un algoritmo para construir dos matching estable los cuales son optimales para los agentes y se lo conoce como algoritmo de aceptación diferida. El algoritmo de aceptación diferida para construir el matching estable  $M$  optimal hace lo siguiente: los agentes de  $M$  hacen una propuesta al agente más preferido de  $W$ , los agentes de  $W$  que recibieron al menos una oferta eligen la mejor propuesta según su orden de preferencia, los agentes de  $M$  que son rechazados continúan haciendo una propuesta al agente más preferido que aún no lo han rechazado y los agentes de  $W$  van eligiendo la mejor propuesta. Cuando este algoritmo para (debido a que tanto  $M$  como  $W$  son conjuntos finitos) las asignaciones entre  $M$  y  $W$  forman un matching estable. El algoritmo que presentamos en este trabajo comienza construyendo un grafo encadenado con las preferencias de los agentes  $M$  y  $W$ . Luego se encuentran los matching optimales a través de una modificación del algoritmo de aceptación diferida para disminuir el número de propuestas. Por último a partir de encontrar circuitos en el grafo se obtiene la red o *latis* de todos los matching estables. Mostramos que este algoritmo construye todos los matchings estables.

---

**Autores: Lisandro Curia, A. Lavalle**  
**Lugar: Universidad Nacional del Comahue**

---

#### APLICACIÓN DE REDES NEURONALES A PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN DE PATRONES

En este trabajo se analizan las capacidades de las Redes Neuronales Artificiales (RNA) para realizar aproximaciones de funciones y predicción de series de tiempo. Se analizan los resultados provenientes de los experimentos numéricos realizados para el problema de aproximación funcional al trabajar con redes Perceptron Multicapa (MLP) o Redes de Base Radial (RBF). Para abordar la problemática de predicción de valores de una serie de tiempo, se distinguieron dos aspectos. Por un lado, el pronóstico de valores futuros cuando se tiene la serie completa, a partir de la cual se construyen los conjuntos de entrenamiento y validación de los modelos neuronales. Para esta tarea, se emplearon redes MLP, Adaline y RBF. Se analizaron las características de las redes citadas en la predicción de valores futuros de la serie de tiempo de demanda de agua. Por otra parte, el segundo problema que se aborda surge cuando existe la necesidad de completar los datos faltantes que pueda contener la serie original. Para estos casos se analiza la flexibilidad que presentan los modelos de redes tratados para combinarse para formar estructuras modulares comúnmente denominadas Modelos Híbridos. Para tratar estos problemas se examina una combinación de técnicas que conforman un modelo híbrido y se busca aquel con mejor rendimiento global. El Modelo Híbrido desarrollado estuvo basado en el aprovechamiento de los aspectos parciales de las distintas redes que mejor rendimiento ofrecen, pero que en conjunto resuelven el problema global de datos faltantes con mejor performance. Se analizan las topologías de RNA que permitan el desarrollo de modelos de gran eficiencia a la hora de aproximar funciones y que puedan asociarse con naturalidad para construir módulos de estructuras más complejas destinados a la resolución de problemas que por sus características requieran un abordaje no algorítmico.

---

**Autores: Eberle, María Gabriela y Maciel, María Cristina**  
**Lugar: Universidad Nacional del Sur**

---

#### UN ALGORITMO DE REGIÓN DE CONFIANZA PARA MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES MATRICIALES

Este trabajo pretende resolver el problema de minimizar una función matricial con un algoritmo basado en la estrategia de región de confianza. La resolución del subproblema de región de confianza implica la minimización de una función cuadrática matricial. Para el caso irrestricto, la optimización de dichas funciones se concreta empleando el método de Newton. El aspecto principal de tal desarrollo consiste en que el paso de Newton resulta de la solución de una ecuación matricial de Riccati que puede resolverse utilizando una técnica basada en el signo de una matriz o bien por medio del método de Newton, en cuyo caso el paso es obtenido como solución de una ecuación matricial de Sylvester. Se analizan las dificultades que implica la incorporación de región de confianza como estrategia de globalización. Se presentan resultados de convergencia y resultados numéricos preliminares.

---

**Autores: Parente, L. A.; Solodov, M. V.; Lotito, P.A.**  
**Lugar: CONICET; IMPA**

---

### UNA EXTENSIÓN DEL MÉTODO HIPP

El esquema conocido como Hybrid Inexact Proximal Point Method (HIPPM), propuesto por Solodov y Svaiter, ha demostrado ser muy útil para la resolución numérica de algunos problemas de Optimización Convexa e Inclusiones Variacionales Monótonas.

En el presente trabajo proponemos una extensión de este método, permitiendo la utilización de matrices simétricas defida positivas en lugar de escalares.

En el mismo sentido extendemos el esquema general de descomposición Hybrid Proximal Decomposition Method (HPDM) (Solodov) y mostramos que el método de descomposición propuesto por He et al. es un caso particular de esta extensión.

---

**Autores: Elina Mancinelli**  
**Lugar: Universidad Nacional de San Luis**

---

### CARACTERIZACIÓN DE EQUILIBRIOS ESTOCÁSTICOS

Dada una red de transporte  $G = (N, A)$  y un conjunto de demandas de transporte desde un nodo origen hasta un destino, el problema de afectación de tráfico consiste en determinar los flujos en los arcos de la red cuando los tiempos de recorrido de los arcos son funciones dadas de los flujos. Se pueden distinguir el caso determinístico (cuando todos los tiempos de recorridos son conocidos por los usuarios) del caso estocástico (cuando los usuarios perciben tiempos de recorrido diferentes de los reales).

- Cuando los tiempos de recorrido son determinísticos y no dependen del flujo en los arcos, la afectación se reduce a determinar la ruta con tiempo de recorrido menor para cada par origen-destino.

- Cuando los tiempos de recorrido son determinísticos y dependen del flujo en los arcos, se consideran los equilibrios de Wardrop que pueden ser calculados por métodos iterativos basados en el caso anterior.

- Cuando los tiempos de recorrido percibidos no dependen de los flujos pero son estocásticos con un error (diferencia entre el tiempo real y el percibido) dado por una distribución de Gumbel, puede calcularse la probabilidad de que un usuario elija una determinada ruta. Esta probabilidad recibe el nombre de logit en la literatura sobre el transporte.

- Finalmente cuando los tiempos de recorrido percibidos son estocásticos y dependen del flujo en los arcos aparece la noción de equilibrios estocásticos

Se presenta una caracterización por medio de inecuaciones variacionales del equilibrio estocástico para diferentes métodos de afectación de tipo logit, como así también resultados sobre la convergencia del algoritmo propuesto para la obtención de dichos equilibrios.

---

#### RECONSTRUCCIÓN DE FUZZY COGNITIVE MAP

Un fuzzy cognitive map (FCM) de tipo I es un digrafo dirigido que representa el comportamiento de un sistema complejo, los nodos  $A_k(t)$  son las variables (tomando valores en un conjunto fuzzy) y los valores en las conexiones  $w_{ij}$  el tipo de relación entre las variables. Mediante el se pueden obtener conclusiones del comportamiento del sistema a partir de una dada condición inicial a través de la fórmula:

$$A(t) = f(WA(t-1)),$$

donde  $f$  es una función umbral. En este trabajo se propone un método para la contrucción automática de fuzzy cognitive map a partir de una serie temporal, de uno de los conceptos, utilizando métodos de reconstrucción para sistemas dinámicos tales como el de las derivadas sucesivas. Se dan ejemplos numéricos para validar el método.

---

#### CONTINUOS FUZZY COGNITIVE MAP

Un fuzzy cognitive map (FCM) de tipo II es un digrafo dirigido que representa el comportamiento de un sistema complejo, los nodos  $A_k(t)$  son las variables (tomando valores en un conjunto fuzzy) y los valores en las conexiones  $w_{ij}$  el tipo de relación entre las variables. Mediante el se pueden obtener conclusiones del comportamiento del sistema a partir de una dada condición inicial a través de la fórmula:

$$A(t) = f(k_1WA(t-1) + k_2A(t-1)),$$

donde  $f$  es una función umbral. En este trabajo se propone una versión continua en forma de ecuación diferencial con retardo:

$$\frac{dA}{dt} = \theta[f(k_1WA(t-\tau) + k_2A(t-\tau)) - A(t-1)],$$

se comparan los comportamientos dinámicos de las dos versiones (puntos fijos, ciclos límites) mediante ejemplos numéricos como así también ventajas y desventajas de esta nueva formulación.

---

**Autores: Elvio A. Pilotta, Sandra A. Santos**

**Lugar: FaMAF-CIEM, Universidad Nacional de Córdoba - IMECC, Universidad Estadual de Campinas, Brasil**

---

#### ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MÉTODO DE RESTAURACIÓN INEXACTA PARA PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Los métodos de Restauración Inexacta han sido propuestos en los últimos años para resolver problemas de programación no lineal general. Cada iteración consiste de dos fases. En la primera fase, llamada restauración, es mejorada la factibilidad de la aproximación actual. En la segunda, llamada minimización, el valor de una función adecuada es reducido en conjunto factible aproximado alrededor del punto restaurado. La teoría de convergencia permite usar diferentes algoritmos para resolver cada una de las fases. Esta característica muy importante y atractiva pues permite aprovechar convenientemente la estructura de cada problema particular. Diferentes algoritmos basados en este método han sido formulados recientemente. En este trabajo se realiza un estudio numérico y computacional de algunas implementaciones de estos métodos. Se analizan la conveniencia de utilizar la función objetivo original del problema y el Lagrangiano en la fase de minimización, así como la influencia en el grado de restauración de las restricciones no lineales. Para este análisis se considera un problema de robótica en el que se desean calcular las fuerzas óptimas de agarre más suave (*gentlest grasp force*), es decir, las fuerzas en los dedos de un robot industrial que alcancen un agarre estable y que minimicen la fuerza normal máxima en los puntos de contacto.

---

**Autores: Gustavo Adolfo Juarez - Silvia Inés Navarro**

**Lugar: Universidad Nacional de Catamarca**

---

#### SIMULACION DISCRETA DEL MODELO CON CAPACIDAD DE CARGA

La Modelización del crecimiento exponencial de una población con un freno proporcional dado a través de la ecuación logística continua y su discretización son ecuaciones cuadráticas que simulan el crecimiento con capacidad de carga. Por otro lado existen discretizaciones de tipo exponencial que describen idéntico comportamiento, al igual que el modelado fuzzy. Aquí se presenta un estudio de un modelo discreto que permite describir el crecimiento con capacidad de carga a través de una ecuación en diferencias lineal de segunda orden no homogénea.

---

**Autores: Silvia Rodríguez, Alejandra Castellini**  
**Lugar: Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina**

---

#### PROBLEMA DE RECOLECCIÓN DE RESIDUOS DOMICILIARIOS Y COLONIAS DE HORMIGAS

El presente trabajo resuelve el problema de recolección de residuos domiciliarios de una zona rural, modelado como el problema del cartero rural (PCR), mediante un algoritmo de optimización basado en colonias de hormigas.

Modelizando este problema mediante grafos, la formulación del mismo es la siguiente: “Sea  $G=(V,A)$  un grafo fuertemente conexo, siendo  $V$  el conjunto de vértices y  $A$  el conjunto de aristas de costo no negativo. Dado  $R \subseteq A$ , siendo  $R$  un conjunto de aristas requeridas, encontrar un tour no necesariamente cerrado en  $G$  que recorra todos los elementos de  $R$  al menos una vez y al menor costo”.

Los algoritmos de Optimización por Colonias de Hormigas (OCH), definen agentes computacionales simples llamados hormigas artificiales, que trabajan de manera cooperativa y se comunican mediante rastros de feromona artificial. Estos algoritmos son esencialmente *constructivos* ya que en cada iteración, cada hormiga construye una solución al problema teniendo en cuenta dos tipos de información que guían su movimiento:

- *Información heurística*: información acerca del problema, y mide la preferencia heurística de moverse desde el vértice  $r$  hasta el vértice  $s$ . Información que no se modifica durante la ejecución.
- *Información de los rastros de feromona artificial*: mide la “deseabilidad aprendida” del movimiento de  $r$  a  $s$ . Esta información se modifica durante la ejecución del algoritmo y se complementa con la acción del entorno “natural” que provoca que la feromona se evapore.

El algoritmo fue aplicado, alcanzando resultados óptimos respecto al recorrido actual diseñado por el municipio.

---

**Autores: Ruth Martínez, Estela Olivera y Jorge Oviedo**  
**Lugar: San Luis**

---

#### SOBRE UN MODELO PARA LA ASIGNACIÓN DE PROFESORES A MATERIAS

En este trabajo se estudia un modelo de asignación de profesores a materias usando matching. Suponemos que los profesores tienen preferencias sobre las materias que quisieran dictar y un ente de gobierno (por ejemplo el consejo de departamento) que asigna una lista de preferencias de materias sobre los profesores. Hasta aquí es un problema de matching cuya teoría nos da una solución o asignación que es estable. Un matching es estable si a cada agente se le asigna un agente aceptable y no hay un par de agentes que puedan romper la asignación. El problema es que cuando uno quiere hacer un plan docente todas las asignaturas deben tener algún profesor mientras que la solución que propone la teoría de matching puede dejar algunas materias sin profesor. Introducimos un nuevo concepto de solución donde a un agente se le puede asignar uno no aceptable y mostramos que esta es una solución estable para el modelo de asignación de profesores a materias.

---

**Autores:** Zaragoza, Liliana-Gayá, Verónica  
**Lugar:** Universidad Nacional de Cuyo-Mendoza

---

#### CONVERGENCIA DE CORRESPONDENCIAS CONJUNTO VALUADAS

La convergencia puntual de correspondencias conjunto valuadas no resulta lo suficientemente apropiada para algunos problemas de optimización. El motivo es que no preserva la semicontinuidad inferior. La falla se produce, obviamente, cuando no hay convergencia uniforme.

La Geometría nos ofrece otro punto de vista de esa dificultad observando los epígrafos de las funciones. En este contexto es posible aplicar el concepto de convergencia de conjuntos directamente a los epígrafos de ellas. Este concepto se aplica para la aproximación de subgradiantes para sucesiones de funciones propias semicontinuas inferiormente que convergen epigráficamente.

---

**Autores:** Juan Carlos Rosales, Hyun Mo Yang  
**Lugar:** Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta, Argentina. EPIFISMA Laboratorio de Epidemiología e Fisiología Matemática Campinas, Sao Paulo, Brasil.

---

#### ESTIMACIÓN DEL NÚMERO DE REPRODUCTIBILIDAD BASAL PARA LA LEISHMANIASIS EN EL N.E. DE LA PROVINCIA DE SALTA ARGENTINA.

Un modelo matemático determinístico del tipo SIR para tres hospederos, es aplicado para analizar el proceso de transmisión de la Leishmaniasis en el NE de la Provincia de Salta, del mismo se deriva la expresión para el número de reproductibilidad basal  $R_0$ . Se implementa el modelo en ambiente Matlab®, en base a datos de las zonas endémicas se realizan simulaciones y se obtiene estimaciones numéricas de  $R_0$ . También se estima la fuerza de infección a partir de cuantificaciones obtenidas estudiando numéricamente el modelo.

---

**Autores:** Marcos Gaudiano  
**Lugar:** FaMAF-UNC-CIEM-CONICET

---

#### SOBRE EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN EL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE LA DIFUSIÓN DE SOLVENTE EN POLÍMERO VIDRIOSO.

##### Sobre el Comportamiento Asintótico en el Problema de Frontera Libre de la Difusión de Solvente en Polímero Vidrioso.

###### Resumen

Consideremos una barra de polímero unidimensional en contacto a un extremo con solvente. Una vez superado cierto umbral de concentración, el solvente avanza a través de la barra satisfaciendo la ecuación del calor. En cada instante de tiempo pueden observarse dos regiones bien delimitadas: una parte de la barra está mojada con solvente y la otra está todavía seca. El punto que separa ambas regiones cambia con el tiempo y se llama frontera libre, la cual es una incógnita en el problema. Los comportamientos asintóticos dependen de la condición de contorno que regule el ingreso de solvente desde el exterior y bajo una condición del tipo convectiva se puede calcular una cota para la frontera libre. Dicha cota resulta independiente de varios de los datos del problema, en particular se mostrará que sigue siendo válida cuando la difusión es no lineal.

---



**Autores: Silvia Di Marco, Charles Figuières, Annie Hofstetter Mabel Tidball**

**Lugar: FCEIA-Universidad Nacional de Rosario, CONICET, Rosario, Argentina – INRA-LAMETA, Montpellier, France**

---

PROCESO ITERATIVO PARA ALCANZAR UN OPTIMO DE PARETO EN UN PROBLEMA AMBIENTAL

Consideremos  $n$  países que al consumir un bien privado producen contaminación y cuyas emisiones estratégicas terminan en un nivel de contaminación global ineficiente. Un mediador está interesado en hacerles implementar un perfil de emisiones individuales eficiente, pero esto requiere normalmente cierta información privada que el mediador desconoce. Hemos construido un mecanismo iterativo que converge a un perfil de emisiones que es un óptimo de Pareto. La ventaja relativa de nuestro mecanismo con respecto a los previos, [1,2], yace en su simplicidad y en sus propiedades incitativas. Siendo  $(E_1, \dots, E_n)$ , la estrategia actual (perfil de emisiones)  $y$ , suponiendo que el mediador quiere modificar las emisiones individuales  $E_i$  por una cantidad  $e_i$ , hará dos preguntas a cada país. Suponiendo, en una primera instancia, que los países reportan los valores ciertos, que es información local, construimos un proceso que:

- Cada vez que se adopta un cambio real después de que el mediador procese las respuestas de los países, las utilidades individuales aumentan.
- Cualquier trayectoria generada por el proceso admite punto límite.
- Todo punto límite de cualquier trayectoria, es un óptimo de Pareto.

[1] S. Aulong, C.Figuières, R. Lifran, 2005, Negotiation process for the protection of the biodiversity. Lameta working paper 2005-8.

[2] Champsaur P., J.-H. Drèze and C. Henry, 1977, Stability theorems with economic applications, *Econometrica*, 45(2), 273-294.

---

**Autores: A. L. Barrenechea, B. M. Marino**

**Lugar: UNCPBA - Tandil**

---

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS PARA CORRIENTES DE GRAVEDAD EVOLUCIONANDO EN CANALES DE SECCIÓN TRANSVERSAL NO RECTANGULAR

Los flujos estratificados que se desarrollan en canales uniformes con sección transversal no-rectangular pueden estudiarse por medio de la aproximación de aguas poco profundas. Del sistema de ecuaciones resultante se han encontrado algunas soluciones particulares obtenidas en forma empírica. El objeto de este trabajo es encontrar todas las posibles soluciones del sistema de ecuaciones mencionado empleando los grupos de simetría de Lie. Aplicando esta metodología, el conjunto de soluciones puede dividirse en cuatro diferentes grupos locales con características físicas distintivas. El análisis de invariancia de los grupos permite encontrar soluciones típicas en cada uno de ellos, a las cuales se les da la correspondiente interpretación física. Se hallan de esta manera tanto las soluciones triviales de cambio de escala, como las soluciones autosimilares y de onda que no han sido reportadas anteriormente. La metodología empleada para resolver este sistema de ecuaciones es general, de modo que puede aplicarse a otros sistemas de interés para una búsqueda exhaustiva de soluciones (cf. M).

[M] L.P. Thomas & B. M. Marino: Lock-exchange flows in non-rectangular cross section channels. *J. Fluids Eng.* 126, 290-292, (2004)

---

**Autores: González, Graciela Adriana - Vargas, Gabriela**  
**Lugar: Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Univesidad de Buenos Aires**

---

#### SOBRE EL CONTROL DEL CAOS EN EL OSCILADOR DE COLPITTS

La problemática conocida como “control del caos” refiere a la posibilidad de modificar (controlar) el comportamiento complejo (caos) de un sistema dinámico mediante una acción de control “pequeña” (ya sea a modo de perturbación o de leves modificaciones en ciertos parámetros accesibles del sistema). Uno de los pilares en esta dirección, busca desterrar el comportamiento caótico pero sacando provecho precisamente del comportamiento complejo propio del sistema a controlar. Esta idea debe ser combinada con una ley de control adecuada y por lo tanto -siendo este comportamiento sólo posible en sistemas no lineales- la aplicación de técnicas de control no lineal al servicio de este objetivo resulta muy atractivo.

Ciertos circuitos u osciladores que desarrollan comportamiento caótico pueden ser modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales que sólo involucran funciones lineales a trozos. Por lo tanto, además de la importancia de su aplicación, resultan objetos matemáticos interesantes por tratarse de estructuras muy simples que desarrollan dinámicas muy ricas. Uno de estos casos es el oscilador de Colpitts, que presenta comportamiento caótico para ciertos valores de los parámetros. En este trabajo nos dedicamos a analizar y confrontar los alcances de distintas técnicas de control no lineal en relación al objetivo de controlar este comportamiento complejo.

---

**Autores: Victoria C. Vampa**  
**Lugar: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP**

---

#### SOBRE LA UTILIZACIÓN DE FORMULACIONES 2D PARA MEJORAR EL COMPORTAMIENTO MEMBRANAL DEL ELEMENTO DE LÁMINA MITC4

Entre los distintos elementos finitos utilizados para el cálculo de estructuras laminares, el elemento MITC4 [1], es un elemento de bajo orden eficiente tanto para problemas dominados por la curvatura, como para aquellos donde el comportamiento membranar es dominante. En el último caso se pueden mejorar las aproximaciones utilizando para las componentes de la deformación en el plano formulaciones que han dado buenos resultados en elementos planos. En ese sentido, a partir de los resultados obtenidos adaptando las interpolaciones propuestas en el elemento plano QMITC, -que mejoran moderadamente con respecto al elemento MITC4-, se analizan e implementan otras formulaciones para las componentes de pliego de la deformación basadas en el desarrollo de Pian-Sumihara [2] para problemas de tensión y deformación plana.

#### Referencias:

- 1 E.N.Dvorkin and K.J.Bathe, A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, Engng. Computations, Vol.1, pp.77-88, 1984.
  - 2 T.H.H. Pian and K. Sumihara, Rational approach for assumed stress finite elements, Int.J. Numer. Methods Eng.20,1685-1695,1984.
-

**Autores: Rosso Ana, Cesco Juan, Denner Claudia, Giubergia Graciela,  
Pérez Jorge**  
**Lugar: UNRC , UNSL**

---

#### UNA APROXIMACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA ENERGÍA POTENCIAL

Este trabajo presenta una alternativa para calcular la energía potencial de un electrón, cuando en la descripción del modelo se utilizan funciones de Slater y gaussianas (STO y GTO). Para determinar esa energía es necesario computar integrales del tipo

$$V_{ij}(\vec{R}) = \int_0^{\infty} f_{ij}(w) j_0(w) dw,$$

donde  $i$  se corresponde con cada STO y  $j$  con cada GTO,  $j_0$  es la función esférica de Bessel de orden cero y

$$f_{ij}(w) = \int_0^{\infty} I_{ij}(w, x) dx.$$

Debido a la complejidad del integrando  $I_{ij}(w, x)$ , se busca un aproximante de  $f_{ij}(w)$ . A partir de los estudios realizados, se pudo establecer que, con  $C_0, C_1, L$  y  $p$  elegidas adecuadamente, la cantidad

$$\int_0^L C_0 \exp(-C_1 w^{2p}) j_0(w) dw$$

es una buena aproximación de  $V_{ij}(\vec{R})$ . Para su estimación se utilizan diferentes reglas de cuadratura a fin de establecer una comparación entre los resultados aproximados y el valor exacto, teniendo en cuenta además los tiempos de cálculo.

---

**Autores: Aronna, S; Aragone L; Lotito P; Rejero G.**  
**Lugar: UNR; CONICET; CONICET; UNR**

---

#### ALGUNOS PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO DE TIPO MINIMAX

En este trabajo consideramos el problema de control óptimo cuando el criterio a optimizar es el supremo esencial de una función escalar y el conjunto de políticas admisibles es el de las funciones esencialmente acotadas a valores en un conjunto compacto.

Se analizan los casos con horizonte finito e infinito. En el caso con horizonte finito también se considera el caso con costo final usando la técnica clásica de considerar una variable extra lo que nos transforma la formulación de tipo Bolza en una de tipo Mayer. En el caso con horizonte infinito se considera, también un costo instantáneo para obtener un comportamiento ergódico.

En cada uno de estos problemas utilizando diferentes argumentos probamos que la función de costo óptimo es solución de sus correspondientes ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman. Estas ecuaciones nos permiten desarrollos de esquemas numéricos para sus soluciones aproximadas. se presentan ejemplos de aplicación.

---

**Autores: Pérez, Laura V., Pilotta, Elvio A.**  
**Lugar: Fac. de Ingeniería, UNRC y FAMAF**

---

OPTIMIZACIÓN DEL CONTROL SUPERVISOR DE UN VEH USANDO TRANSCRIPCIÓN  
DIRECTA DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Para operar eficientemente sistemas electromecánicos con dos fuentes de energía, es necesario determinar el aporte instantáneo de cada fuente que minimice el consumo del sistema en su conjunto. Un ejemplo de estos sistemas son los vehículos eléctricos híbridos, que cuentan con un motor de combustión interna y un banco de baterías. Este problema puede ser planteado como un problema de control óptimo con horizonte finito sujeto a restricciones de desigualdad en la función de control y en la variable de estado.

Resolver este problema usando las condiciones de optimalidad del principio del máximo de Pontryagin resulta complicado debido a que tanto el funcional objetivo, como la ecuación de estado son no lineales y la última, inclusive, está definida por tramos. Por otra parte, las restricciones de desigualdad obligan a introducir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Otra forma de resolver estos problemas es usando programación dinámica, pero a un altísimo costo de cómputo.

Buscando evitar estas dificultades, se ha elegido un enfoque en que el problema es discretizado completamente, convirtiéndolo así en un problema de optimización con restricciones, en un espacio de dimensión finita que es resuelto usando una programación no lineal. Aquí se describe el problema de control óptimo, la discretización usada y el problema de optimización resultante. Asimismo se muestran los resultados obtenidos para el caso del vehículo eléctrico híbrido en desarrollo en el Grupo de Electrónica Aplicada en la Universidad Nacional de Río Cuarto.

---

**Autores: Larriqueta, Mercedes y Vera de Serio, Virginia**  
**Lugar: Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina**

---

STABILITY OF THE RELATIVE POSITION OF SOLUTION SETS OF SEMI-INFINITE  
SYSTEMS

Given two non-empty sets in the Euclidean space which are the solution sets of two systems of (possibly infinite) inequalities, the existence theorems allow to decide whether their intersection is empty or not and, in the last case, the Farkas type results allow to decide whether one of the two sets is contained or not in the other one (which constitutes the so-called containment problem). In those situations where the data (i.e., the constraints) can be affected by some kind of perturbations, the problem consists of determining whether the relative position of the two sets is preserved by sufficiently small perturbations or not. We deal with this stability problem as a particular case of the maintaining of the relative position of the images of two set-valued mappings.

We give sufficient conditions for the stability of the relative position of the two solution sets, and necessary ones as well; in particular we consider (semi-infinite) convex systems and also linear systems.

---

EXISTENCIA DE SOLUCIONES Y ESTABILIDAD EXPONENCIAL PARA UN SISTEMA TERMOELÁSTICO.

Se considera un modelo para describir la dinámica de las secciones transversales (Fig. 2) de una estructura triangular (inflable/rigidizable) que constituye el esqueleto de las antenas de un telescopio espacial (Fig. 1). El sistema consiste de dos vigas fijadas en uno de los extremos y acopladas por una junta en el otro. El modelo se describe mediante dos ecuaciones en derivadas parciales de Euler-Bernoulli para los movimientos transversales, dos ecuaciones de onda para los movimientos longitudinales, todas con atenuación térmica, y cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias para la dinámica de la junta que determinan condiciones de frontera dinámicas en las EDP. Se incorpora además el efecto de la radiación solar a través ecuaciones para la distribución de temperatura en las vigas y términos que acoplan los efectos mecánicos y térmicos. El modelo se complementa con condiciones de compatibilidad geométricas y dinámicas en las dos interfaces viga-brazo. Se utiliza una descripción de espacio de estados y teoría de semigrupos para probar la existencia y regularidad de soluciones. También se prueba que la atenuación térmica es suficiente para inducir estabilidad exponencial. Se caracterizan los estados estacionarios y se muestran también resultados numéricos.

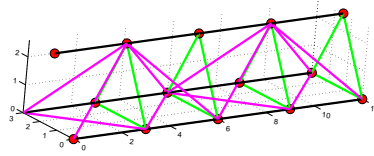


Fig. 1: Antena

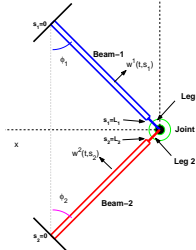


Fig. 2: Componente transversal

STABILITY OF INEQUALITY SYSTEMS INVOLVING MAX-TYPE FUNCTIONS

We study the stability of certain inequality systems that arise in monotonic analysis. These systems are defined by certain classes of abstract linear functions. We consider the non-negative orthant  $\mathbb{R}_+^n$  as a base space and the class of abstract linear functions consisting of the family of the max-type functions of the form  $a(x) := \langle a, x \rangle = \max_{i=1,2,\dots,n} a_i x_i$ , with  $a$  and  $x$  in  $\mathbb{R}_+^n$ . Systems of infinitely many max-type inequalities,  $\{\langle a_t, x \rangle \geq b_t, t \in T\}$ , are considered, and the stability of the solution set mapping, under perturbations of all the coefficients, is studied from different points of view: lower semicontinuity, continuity in the Bouligand sense, metric regularity, the existence of strong Slater points, adapted Robinson-Ursescu condition.

---

**Autores: Rafael V. Verdes**

**Lugar: Instituto de Matemática Beppo Levi - Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario**

---

#### SOBRE CIERTO TIPO DE INECUACIONES VARIACIONALES NO LINEALES

En el marco de un espacio reflexivo  $V$ , se considera la inecuación variacional

$$a(\rho(u), u, v-u) \geq L(v-u)$$

sobre un conjunto convexo cerrado  $K$ , donde  $L$  es un funcional lineal,  $a(w, u, v)$  es una forma bilineal en  $u, v$ , no necesariamente lineal en  $w$ , y  $\rho$  es un operador no lineal.

Se define un operador asociado  $A$ , que actúa de  $V$  en  $V'$  poniendo

$$\langle A(u), v \rangle = a(\rho(u), u, v) \quad u, v \in V,$$

y se formulan adecuadas hipótesis sobre  $\rho$  y  $a$ , bajo las cuales el operador  $A$  resulta hemicontinuo y estrictamente monótono, lo que permitirá mostrar la existencia y unicidad de solución de la inecuación planteada.

Mediante un método de linealización que consiste en fijar  $z \in K$  y considerar la inecuación variacional lineal

$$a(\rho(z), u, v-u) \geq L(v-u) \quad \text{sobre } K,$$

se define de manera iterativa una sucesión  $(u_n)$  de elementos de  $K$ , y se demuestra que esta sucesión converge a la solución de la inecuación variacional no lineal original.

Los resultados obtenidos se aplican a un problema no lineal del tipo Sturm Liouville.

---

**Autores: Verónica Gayá**

**Lugar: Mendoza**

---

#### CONJUNTO OPTIMAL Y PROBLEMAS BIEN PUESTOS EN EL SENTIDO DE HADAMARD II

Debido a la dificultad en la determinación de los parámetros del modelo de un problema de optimización muchas veces se opta por utilizar sólo estimaciones de los mismos, obteniéndose así no el modelo del problema sino el de un problema próximo a éste. Se hace necesario entonces el estudio de la estabilidad de los conjuntos (de puntos factibles y de puntos óptimos) asociados a un problema de optimización; así como otras condiciones que se refieren al modo en que éste está planteado. Los resultados obtenidos establecen algunas condiciones bajo las cuales un problema de optimización convexa semi-infinita puede considerarse estable. Se muestran las relaciones establecidas entre la continuidad de la correspondencia conjunto optimal con la de la correspondencia conjunto factible, con la de la función valor óptimo y con el concepto de problema bien puesto en el sentido de Hadamard.

---

# TOPOLOGÍA Y MATEMÁTICA DISCRETA

**Autores:** Juan Carlos Bressan

**Lugar:** Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires

---

## UNA TOPOLOGÍA COMPATIBLE CON UNA GEOMETRÍA LINEAL DENSA Y EXTENSIBLE

Sea  $(X, S)$  una geometría lineal densa y extensible (*unending*), donde  $X$  es un conjunto y  $S$  una función *segmento* en  $X$ ,  $S(a,b) = [a,b] \subseteq X$ , que cumple los axiomas dados en Coppel [1]. Se demuestra que  $(X, S)$  es un espacio de  $\mathbf{JD}$ -convexidad  $T_1$  con la propiedad de Pasch, con lo cual se puede desarrollar una teoría de los conjuntos convexos y de los estrellados que no requiera una topología.

En esta comunicación se induce una topología sobre  $X$  a partir de la estructura de  $(X, S)$ . Se define el conjunto de puntos internales de  $A$  (*inter*  $A$ ) por analogía con el caso vectorial, un entorno convexo de  $x$  es un convexo  $U$ , tal que  $x \in U = \text{inter } U$ ; con lo cual si  $y \in U$ ,  $U$  es entorno convexo de  $y$ . Así se obtiene una topología sobre  $X$ . Denotaremos con “*int*” el interior y con “*cl*” la clausura en dicha topología. Si  $C$  es convexo, entonces  $\text{inter } C = \text{int } C$ . El espacio vectorial real  $n$ -dimensional es un geometría lineal densa y extensible, tal que la topología así inducida es igual a la topología de sus normas. Para obtener ciertas propiedades topológicas de los convexos y estrellados análogas a las que se demuestran en espacios vectoriales topológicos se dan algunos axiomas relativos a los entornos que permiten suplir la ausencia de una estructura vectorial. Denotaremos con “*conv*” la cápsula convexa, “*cconv*” la cápsula convexa cerrada,  $\text{mir } S = \{x \in S : \forall y \in S, [x,y] \subseteq S\}$ , si  $p \neq z$ ,  $(p,z) = [p,z] \setminus \{p,z\}$ . Algunos de los resultados que se obtienen con estos axiomas adicionales son:

- 1) Si  $S \subseteq X$ , entonces  $\text{mir } S \subseteq \text{mir}(cl S)$ ,  $(\text{mir } S) \cap (\text{int } S) \subseteq \text{mir}(\text{int } S)$  y  $cconv S = cl(conv S)$ .
  - 2) Si  $C$  es convexo, entonces  $\text{int } C$  y  $cl C$  son convexos.
  - 3) Si  $S \subseteq X$  es abierto, entonces  $conv S$  es abierto.
  - 4) Si  $C$  es convexo con  $\text{int } C \neq \emptyset$ , entonces  $\text{inter } C = \text{int } C = \text{int}(cl C)$ .
  - 5) Si  $p \in \text{int}(\text{mir } S)$  y  $z \in cl S$ , entonces  $(p,z) \subseteq \text{int } S$ .
- [1] W. Coppel: *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge, 1998.
- 

**Autores:** Marina Fragalá, Gabriel Minian

**Lugar:** UNGS y Universidad de Buenos Aires

---

## SD-HOMOTOPÍA PARA ESPACIOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Los poespacios y la homotopía dirigida comenzaron a ser estudiados por varios topólogos algebraicos en los últimos años, con el objetivo de modelar y resolver problemas de ejecución simultánea provenientes de la computación científica. Un poespacio es un espacio topológico junto con un orden parcial y una homotopía dirigida o di-homotopía es una homotopía que tiene en cuenta también el orden parcial de los espacios involucrados.

La noción de sd-homotopía está muy relacionada con la de di-homotopía, aunque su formulación es más geométrica y, por lo tanto, más manejable.

En esta charla introduciremos los conceptos básicos de la sd-homotopía y mostraremos varios ejemplos y aplicaciones de esta teoría. Entre otras cosas, veremos su relación con la homotopía clásica y con la di-homotopía, definiremos el grupo fundamental de sd-homotopía y analizaremos la información geométrica que se puede extraer de él.

---

**Autores: Gabriel Minian**  
**Lugar: Universidad de Buenos Aires**

---

#### LA TOPOLOGÍA DE UN CONJUNTO CON RELACIONES

Una relación de equivalencia en un conjunto  $X$  induce una estructura de grupoide y, vía la realización geométrica, una topología en  $X$ . Si, en lugar de una sola relación, se tienen varias relaciones de equivalencias definidas en  $X$  (que interactúan entre sí), entonces  $X$  admite una estructura de *atlas de grupoides*. Esta noción fue introducida recientemente por A. Bak, R. Brown, G. Minian y T. Porter para estudiar algunos objetos matemáticos relacionados con la topología algebraica y la K-teoría.

En esta charla contaré como se pueden estudiar distintas relaciones (no necesariamente de equivalencia) definidas en un conjunto dado utilizando herramientas y métodos relativamente básicos de la topología algebraica.

---

**Autores: Gatica, M. Andrea; Rey, Andrea A.; Suárez-Alvarez, Mariano**  
**Lugar: UNS-UBA**

---

#### EQUIVALENCIA HOMOTÓPICA ENTRE CORONAS DÉBILES Y CORONAS

En esta comunicación se definirá el concepto de corona débil, introducido por Assem - Platzeck - Redondo - Trepode, y se probará la existencia de una equivalencia homotópica débil entre una corona débil y una corona, a partir de una topología dada para posets. De esta forma quedarán determinados los grupos de homotopía, homología y cohomología de la realización geométrica del complejo simplicial asociado a las coronas débiles via la realización geométrica del complejo simplicial asociado a las coronas.

---



## LA 2-DIMENSIÓN DE UN POSET DESDE EL PUNTO DE VISTA TOPOLÓGICO

Todo conjunto ordenado finito es un suborden de  $2^n$  para algún  $n$ . La 2-dimensión de un poset finito  $P$  es el mínimo  $n$  tal que  $P$  es suborden de  $2^n$ . Este invariante comenzó a estudiarse a partir de la década del 70 y en la actualidad sigue siendo estudiado por matemáticos y computadores científicos.

Si bien se han encontrado algunas cotas y varias fórmulas para la 2-dimensión de un poset de  $n$  puntos, el cálculo preciso de este invariante no resulta sencillo.

Usando una identificación entre los posets finitos y los espacios topológicos finitos  $T_0$ , definiremos y estudiaremos el concepto de la 2-dimensión desde el punto de vista topológico.

Mostraremos primero cómo se pueden obtener las cotas clásicas utilizando argumentos topológicos y luego probaremos cómo se pueden refinar esas cotas utilizando argumentos sencillos de teoría de homotopía para espacios finitos.

### Referencias

1. J.A. Barmak, E.G. Minian. *Minimal finite models*. Preprint (2006).
2. B. Dushnik, E. Miller. *Partially ordered sets*. Am. J. Math. 63 (1941), 600-610.
3. M. Habib, L. Nourine, O. Raynaud, E. Thierry. *Computational aspects of the 2-dimension of partially ordered sets*. Theoretical Computer Science 312 (2004), 401-431.
4. W.T. Trotter. *Embedding finite posets in cubes*. Discrete Math. 12(1975), 165-172.
5. W.T. Trotter. *Combinatorics and partially ordered sets: Dimension theory*. John Hopkins University Press, Baltimore (1991).
6. W.T. Trotter. *Graphs and partially ordered sets: Recent results and new directions*. Technical report, Arizona State University (1995).

## SOBRE GRAFOS CUBRIDORES CON RESTRICCIONES

Un grafo de comparabilidad es aquel que admite una orientación transitiva en sus aristas. Dada una tal orientación, si consideramos sólo las aristas dirigidas no implícitas por transitividad, obtenemos el diagrama de dicha orientación. Su grafo cubridor es el grafo subyacente en el correspondiente diagrama.

En este trabajo se considera el problema de hallar una orientación transitiva para un grafo de comparabilidad con la condición de que su grafo cubridor contenga un conjunto dado de aristas. Basándose en la descomposición modular de un grafo, condiciones necesarias y suficientes son presentadas para cada tipo de vértice del árbol descomposición modular.

Finalmente, un algoritmo del orden  $n^2$ , con  $n$  el número de vértices del grafo, determina si tal orientación existe o no.

---

**Autores: M. Gutierrez, J. L. Swarcfiter, S. B. Tondato**  
**Lugar: Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de La Plata.**

---

#### PROPIEDADES DE LA REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE GRAFOS HAMILTONIANOS DE INTERVALOS.

Si  $G$  es un grafo y  $C$  es un ciclo de  $G$  se dice que  $C$  es extensible si existe un vértice  $x$ , de  $G$ , tal que  $C \cup \{x\}$  es un ciclo de  $G$ .

Si un grafo es hamiltoniano y es ciclo extensible entonces desde cualquier ciclo es posible obtener un ciclo hamiltoniano.

Diferentes autores han probado que para ciertas clases de grafos, todo hamiltoniano es ciclo extensible(planares[2], intervalos[1]).

En 1990 Hendry conjetura que todo grafo cordal hamiltoniano es ciclo extensible.

Se estudia esta conjetura utilizando la herramienta proporcionada por las representaciones canónicas de un grafo cordal.

Se han obtenido resultados parciales en el caso particular de intervalos propios y de intervalos.

[1] A. Abueida, R. Sritharan, Cycle extendability and Hamilton cycles in chordal graph classes, (2004) preprint.

[2] T. Jian, Planar Hamiltonian chordal graphs are cycle extendable, Discrete Mathematics, 257(2002), 441-444.

---

**Autores: Liliana Alcón, Luerbio Farias, Celina Figueiredo, Marisa Gutierrez**

**Lugar: UNLP - UFRJ**

---

#### EL PROBLEMA DE RECONOCIMIENTO DE LOS GRAFOS CLIQUE ES NP-COMPLETO

Un *clique* de un grafo es un subconjunto maximal de vértices mutuamente adyacentes. Un grafo  $G$  se dice un *Grafo Clique* si es el grafo intersección de los cliques de algún grafo  $H$ . Varios problemas relacionados con los cliques de un grafo han sido estudiados en las últimas décadas, como introducción a los mismos puede verse, por ejemplo, [3]. Entre estos problemas es de particular importancia el de reconocimiento de los grafos Clique: *dado un grafo  $G$  determinar si  $G$  es o no un grafo Clique*. En [1] y en [2] se presentaron caracterizaciones de los grafos Clique, sin embargo a partir de ellas no se pudo obtener un algoritmo eficiente de reconocimiento.

En este trabajo probamos, mediante una reducción de 3-SAT, que el reconocimiento de los grafos Clique es un problema NP-completo. Planteamos la búsqueda de algoritmos de aproximación y de clases de grafos en las cuales el problema sea polinomial.

#### References

- [1] L. Alcón, M. Gutierrez, A new characterization of Clique graphs, *Matemática Contemporânea*, **25**, 2003, 1–7.
  - [2] F. S. Roberts, J. H. Spencer, A characterization of Clique graphs, *Journal of Combinatorial Theory B* **10**, 1971, 102–8.
  - [3] J. L. Swarcfiter, A survey on Clique graphs, in *Recent Advances in Algorithmic Combinatorics*, C. Linhares-Sales and B. Reed, eds., Springer-Verlag, 2002.
-

SOBRE GRAFOS DE EMPAQUETAMIENTO TOTALMENTE BALANCEADOS

Deng et al (1) estudian el total balanceo de los juegos combinatorios de cubrimiento y empaquetamiento en términos de la matriz  $0, 1$  que define cada juego.

En un trabajo reciente, van Velzen (2) caracteriza el total balanceo de un juego de cubrimiento en términos de la perfección de la matriz que lo define. Este resultado motiva el análisis de cierta familia de grafos asociados a los juegos de empaquetamiento totalmente balanceados, con el objeto de avanzar en el conocimiento de estos últimos.

En este trabajo definimos a los grafos PTB como aquellos para los cuales su matriz clique-nodo define un juego de empaquetamiento totalmente balanceado. Además, introducimos a los grafos *estable-perfectos* como aquellos para los cuales el tamaño de la máxima clique coincide con el número cromático para él y para todo subgrafo obtenido por borrado de conjuntos estables maximales. Mostramos que un grafo es PTB si y solamente si es estable perfecto.

Con el objeto de hallar en el futuro, una caracterización en término de menores prohibidos, introducimos el concepto de grafo *mínimamente no estable-perfecto* (MNSP). Mostramos algunas familias de grafos MNSP halladas.

(1) Bas van Belzen. (2005): *Discussion Paper: Simple Combinatorial Optimisation Cost Games*. ISSN 0924-7815.

(2) Deng, X., Ibaraky, T., Nagamochi, H. and Zang W. (2000): *Totally balanced combinatorial optimization games*. Math. Program. Ser. A **87**, pp. 441-452.

ESTRUCTURA DE ORDEN SOBRE EL CONJUNTO DE EQUILIBRIOS COMPETITIVOS DE UN JUEGO DE ASIGNACIÓN MUCHOS-A-MUCHOS, HETEROGÉNEO Y ASIMÉTRICO

Estudiamos una generalización del juego de asignación de Shapley-Shubik [3] a un contexto muchos-a-muchos. Se modela un mercado bilateral heterogéneo con dinero, en el cual cada agente ofrece o demanda una cierta cantidad entera de unidades de los diferentes tipos de bienes. En el conjunto de precios de equilibrio competitivo, los agentes de cada lado del mercado pueden comparar los distintos resultados al menos de dos maneras distintas, mirando sólo precios, o considerando la utilidad que le reporta la canasta de bienes adquirida o vendida. La primera forma de comparar distintos equilibrios produce una estructura reticular (lattice) dual, con oposición de intereses entre ambos lados del mercado (que es lo que ocurre habitualmente en estos modelos, ver [1], [2], [3], y [4]). La segunda forma de comparar equilibrios sólo da estructura reticular para un lado del mercado, los compradores. Se pierde la dualidad y la oposición de intereses con los vendedores, para los cuales comparar vía utilidad es sólo un preorden. La introducción de la noción de **segmentación** de mercados, explica de manera satisfactoria la pérdida de la dualidad y la oposición de intereses al comparar equilibrios vía utilidad.

Referencias:

1. Camiña, E (2005). A generalized assignment game, UAB\_IDEA, preprint.
  2. Shapley, L. S., and Shubik, M. (1972). The assignment game I: the core. The International Journal of Game Theory, 1, 111-30.
  3. Martínez, R., Massó, J., Neme, A. and Oviedo, J. (2001) "On the lattice structure of the set of stable matchings for a many-to-one model". Optimization, 50, pp. 439-457.
  4. Sotomayor, M. (1992) "The multiple partners game". In: Majumdar M (ed.) Equilibrium and dynamics: Essays in Honor to David Gale Macmillian, pp. 322-336.
-

#### SOBRE FACETAS DEL POLIEDRO DE CUBRIMIENTO DE CONJUNTOS

Dada una matrix  $A$   $m \times n$ ,  $0, 1$  sin filas ni columnas nulas, el poliedro de cubrimiento de conjuntos asociado a  $A$ , se define como la cápsula convexa de soluciones de  $Ax \geq \mathbf{1}$  y  $x_j \in \{0, 1\}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . La descripción de este poliedro en términos de sus *facetas* ha sido estudiada por diversos autores, (ver Balas y Ng [1], Cornuéjols y Sassano [2], Sassano [3] entre otros).

En este trabajo establecemos una caracterización de las desigualdades que describen facetas del poliedro de cubrimiento de conjuntos. Utilizando este resultado, generalizamos una condición suficiente dada por Sassano (1989).

También obtenemos condiciones necesarias que satisfacen las desigualdades que definen facetas, generalizando una condición encontrada por Cornuéjols y Sassano (1989) para el caso particular de la desigualdad de rango.

**Palabras claves:** cubrimiento, empaquetamiento, desigualdad de rango, faceta.

#### Referencias

- [1] E. Balas, S. M. Ng, *On the set covering polytope: I. All the facets with coefficients in  $\{0, 1, 2\}$* , Mathematical Programming 43, pp. 57–69, 1989.
- [2] G. Cornuéjols, A. Sassano, *On the 0, 1 facets of the set covering polytope*, Mathematical Programming 43, pp. 45–55, 1989.
- [3] A. Sassano, *On the facial structure of the set covering polytope*, Mathematical Programming 44, pp. 181–202, 1989.

#### SOBRE EL ESPECTRO DEL DIGRAFO ADJUNTO Y $(h, j)$ ADJUNTO DE UN MULTIDIGRAFO $k$ -REGULAR

##### Resumen:

En este trabajo en el que relacionamos la Teoría de Grafos con la Teoría de Matrices, en particular la de Polinomios Característicos de Matrices y Espectro de un Grafo, nuestro objetivo es demostrar mediante representaciones matriciales adecuadas, que la matriz de precedencia del digrafo adjunto de un multidigrafo  $k$ -regular de  $n$  vértices, tiene como autovalores a  $k$  con multiplicidad  $n$  y a cero con multiplicidad  $n \cdot (k-1)$ . También demostraremos que la matriz de precedencia del digrafo  $(h, j)$  adjunto de un multidigrafo  $k$ -regular de  $n$  vértices, tiene como autovalores a  $k^h$  con multiplicidad  $n \cdot k^j$  y a cero con multiplicidad  $n \cdot k^j \cdot (k^h - 1)$ .

##### Referencias bibliográficas:

- Chiapa, R. “Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos”. INMABB-CONICET. Universidad Nacional del Sur. (1982).
- Chiapa, R. Sanza, C. “Grafos y Matrices”. Universidad Nacional del Sur. (1999).
- Hemminger and Beineke. “Line graphs and line digraphs”. Selected Topics in Graphs Theory. Academic Press (1978).

# TEORÍA DE APROXIMACIÓN

**Autores: Levis F. E., Cuenya H. H.**  
**Lugar: Universidad Nacional de Río Cuarto**

---

## UNA PROPIEDAD DE LA MEDIDA PLANAR DE LA LEMNISCATA

Sea  $\mathbb{C}$  el conjunto de números complejos y  $\mu(A)$  la medida planar del conjunto  $A \subset \mathbb{C}$ . Para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  y  $c > 0$ , consideramos la lemniscata  $E(\alpha, c)$ , de focos  $\alpha_j, 1 \leq j \leq n$ , y radio  $c$ , es decir, el conjunto  $\left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{j=1}^n |z - \alpha_j| \leq c \right\}$ .

En este trabajo establecemos la siguiente conjetura.

**Conjetura** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Existe una constante  $\mathcal{K} > 0$  tal que para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{C}^n$  y para todo radio  $c$ , existe un círculo  $B = B(\alpha, c)$  contenido en  $E(\alpha, c)$  satisfaciendo  $\mu(E(\alpha, c)) \leq \mathcal{K}\mu(B(\alpha, c))$ .*

Nosotros probamos esta conjetura para el caso de a lo sumo tres focos. Además si  $a > 0$ , mostramos la existencia de una constante  $\mathcal{K} := \mathcal{K}(a) > 0$  verificando la conjetura para todo radio  $c$  y para todo  $\alpha \in \mathcal{M}_a$ , donde

$$\mathcal{M}_a := \left\{ \alpha \in \mathbb{C}^n : \min_{\alpha_j \neq \alpha_i} |\alpha_j - \alpha_i| \geq a \max_{j,i} |\alpha_j - \alpha_i| \right\}.$$

Aquí nosotros convenimos que  $\min_{\alpha_j \neq \alpha_i} |\alpha_j - \alpha_i| = 0$  si  $\alpha$  es un multi-índice con todas las coordenadas iguales.

Cabe destacar que la validez de la conjetura tiene implicancias en desigualdades polinomiales en espacios  $L^p$ ,  $0 < p \leq \infty$ , y permite obtener resultados de mejor aproximación local multipuntual en el dominio complejo, para  $k$ -uplas balanceadas.

---

**Autores: F. Mazzone y E. Schwindt**  
**Lugar: Río Cuarto**

---

## UNA FÓRMULA MINIMAX PARA MEJORES APROXIMANTES NATURALES

Es conocida la no unicidad del mejor aproximante por funciones monótonas en la métrica uniforme. Como fuera hecho por Landers y Rogge para mejores aproximantes en la norma  $L^1$ ; R. Darst y S. Sahab demostraron que el límite de mejores aproximantes por funciones no decrecientes en la norma  $L^p$  a una función continua  $f$  tiende, cuando  $p \rightarrow \infty$ , a un mejor aproximante de  $f$  en la métrica uniforme. Es usual llamar a este mejor aproximante, el *mejor aproximante natural* de  $f$ . En este trabajo encontramos una fórmula explícita, del tipo minimax para el mejor aproximante natural. Además damos una demostración más breve de los resultados de Darst y Sahab y establecemos algunas propiedades de los mejores aproximantes naturales.

---

APROXIMACIÓN CUASI RACIONAL EN VARIOS PUNTOS.

Sean  $V$  y  $W$  dos subespacios de dimensión finita de  $C^{k+1}(\Omega)$  donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos  $W_0$  el subespacio definido por  $\{w \in W : w(0) = 0\}$  y  $W_1$  el espacio afín  $\{w \in W : w(0) = 1\}$ . Dada  $f \in C^{k+1}(\Omega)$  y  $\epsilon > 0$ , decimos que  $(v_\epsilon, w_\epsilon) \in V \times W_1$  es un  $\epsilon$  - mejor par aproximante de  $f$  con respecto a la seminorma  $\|\cdot\|_\epsilon$  si:

$$\|(fw_\epsilon - v_\epsilon)^\epsilon\|_\epsilon = \min_{(v,w) \in V \times W_1} \|(fw - v)^\epsilon\|_\epsilon.$$

Introducimos en este trabajo las propiedades de diferenciabilidad directa e inversa para una familia de seminormas  $\|\cdot\|_\epsilon$ . Asumiendo que las seminormas satisfacen estas propiedades, que el subespacio  $fW_0 - V$  es unívocamente interpolante en cero de orden  $k$  y que además  $fW_0 \cap V = \{0\}$ , probamos que  $v_\epsilon \rightarrow v \in V$  y  $w_\epsilon \rightarrow w \in W_1$ , para  $\epsilon \rightarrow 0$ , donde  $v$  y  $w$  son las únicas funciones que verifican:  $D^\alpha(fw - v)(0) = 0$ ,  $|\alpha| \leq k$ . También damos una familia de ejemplos de seminormas que tienen las propiedades de diferenciabilidad directa e inversa: por un lado las seminormas consideradas en [2] y por otro lado cierto tipo de normas pesadas. Para un caso particular de estas últimas, obtenemos un resultado de mejor aproximación local cuasi racional para un punto en  $\mathbb{R}^n$ , probado en [1]. Nuestro trabajo abarca el caso de aproximación cuasi racional multi puntual.

[1] Chui C. K., Diamond H. and Raphael L.A. Best Local Approximation in Several Variables. Journal of Approximation Theory, 40, (1984), 343-350.

[2] Zó, F. and Cuenya H.H. Best approximations on small regions. A general approach.(2006). Por aparecer.

INTERPOLACIÓN Y ESPACIOS DE APROXIMACIÓN

En los procesos de aproximación no-lineal medimos la velocidad de decrecimiento del error en términos del número de parámetros en el aproximante. Estos procesos de aproximación pueden definirse como la aproximación de una función  $f \in \mathbb{X}$  a través de una sucesión de variedades no-lineales  $\mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}$ . Definimos entonces el espacio de funciones aproximables a velocidad  $\alpha$ ,  $\mathbb{A}^\alpha = \{f \in \mathbb{X} : \|f\|_\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha \inf_{g \in \mathbb{X}_n} \|f - g\|_\mathbb{X} < \infty\}$ . Tratamos la caracterización de estos espacios para el método de elementos finitos adaptativo utilizando teoría de interpolación.

---

ALGUNAS DESIGUALDADES DÉBILES Y FUERTES PARA OPERADORES DE MEJOR  
APROXIMACIÓN

Dada una sucesión no decreciente de  $\sigma$ -retículos  $\mathcal{L}_n$  de un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  y dada  $f \in L_p(\Omega)$ , D. Landers y L. Rogge estudiaron estimaciones de la función maximal asociada a  $\mathcal{L}_n$ , a saber:

$$f^*(x) = \sup |g_n|,$$

donde  $g_n$  es un mejor aproximante a  $f$  por funciones  $\mathcal{L}_n$ -medibles en  $L_p(\Omega)$ . En especial ellos demostraron que la función maximal satisface cierta desigualdad  $(p-1, p-1)$  débil y desigualdades  $(q, q)$  fuertes cuando  $q > p-1$ . Posteriormente S. Favier y F. Zó extendieron estos resultados, a espacios de Orlicz. Ellos demostraron que el operador maximal en  $L_\Phi(\Omega)$  es de tipo débil  $(\Phi', \Phi')$  y de tipo  $(\Psi, \Psi)$  fuerte para ciertas funciones  $\Psi$ , en especial  $\Psi' = [\Phi']^p$ ,  $1 \leq p$  y  $\Psi = [\Phi]^p$  para  $p \geq p_0$  y  $p_0$  es un número menor a 1. En este trabajo mejoramos los resultados anteriores, en particular transformamos la desigualdad débil en otro tipo de desigualdad débil, con esta nueva desigualdad nos es relativamente sencillo determinar una clase general de funciones  $\Psi$  para las cuales vale la desigualdad fuerte. Los resultados obtenidos implican los de S. Favier y F. Zó y se mejora uno de ellos, en el sentido que nos es posible derivarlo con menos hipótesis.

---

LA FUNCIÓN ERROR PARA DILATACIONES NO HOMOGÉNEAS

Sean seminormas monótonas de funciones  $\|F\|_\varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , actuando sobre funciones medibles Lebesgue  $F : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , donde  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ . Suponemos que son finitas sobre las funciones constantes y que para cada  $F \in C_k(B)$ , se verifica  $\|F\|_\varepsilon \rightarrow \|F\|_0$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además  $\|F\|_0$  es una norma sobre  $C_k(B)$ . Denotamos por  $\pi^m$  al conjunto de todos los polinomios algebraicos en  $n$ -variables de grado a lo más  $m$ ,  $M = (m_1, \dots, m_k)$  y  $\Pi_k^M$  al conjunto  $\{P = (p_1, \dots, p_k) : p_i \in \pi^{m_i}\}$ .

Sea  $\mathcal{A}$  un subespacio de polinomios  $\Pi_k^M \subseteq \mathcal{A} \subseteq \Pi_k^{\bar{M}}$ , y  $P_\varepsilon \in \mathcal{A}$  una mejor aproximación de la función  $F$  con la seminorma  $\|F\|_\varepsilon^* = \|F^\varepsilon\|_\varepsilon$ , con  $F^\varepsilon(x) = F(\varepsilon^{\alpha_1} x_1, \dots, \varepsilon^{\alpha_k} x_k)$  y donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ . Sea  $E_\varepsilon(F)$  la función error cuya  $i$ -ésima componente es  $\varepsilon^{-\alpha_i(m_i+1)} [F^\varepsilon - P_\varepsilon]_i$ . Se demuestra que el error es  $[E_\varepsilon(F)]_i = \sum_{|\beta|=m_i+1} a_{\beta,i} \mathbf{x}^\beta - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha_i(m_i+1)}} [P_{A^\varepsilon, \alpha}^\varepsilon(G)]_i + o(1)$  con  $\alpha_i m_i = m$ ,  $\alpha_i \bar{m}_i = \bar{m}$  para todo  $i$ , donde los coeficientes  $a_{\beta,i}$  vienen dados por el polinomio de Taylor generalizado de grado  $\bar{m}$   $[T_{\bar{M}}(\mathbf{x})]_i = \sum_{|\beta| \leq \bar{m}_i} a_{\beta,i} \mathbf{x}^\beta$ .

---